جریان تراکم پذیر (فصل ۹)

- Compressible Flow

جریان تراکم پذیر

مباحث درس

- تعاریف و مفاهیم پایه
- سرعت صوت
- جریان تراکم پذیر آیزنتروپیک
- اثر تغییر سطح در جریان تراکم پذیر
- جریان در کانال هم گرا-واگرا
- شوک نرمال
- معادلات جریان دوبعدی تراکم پذیر

جریان تراکم پذیر

- رژیم جریان تراکم پذیر با محدوده سرعت صوت تعیین می شود M=V/a

$Ma < 0.3$:	*incompressible flow*, where density effects are negligible.
$0.3 < Ma < 0.8$:	*subsonic flow*, where density effects are important but no shock waves appear.
$0.8 < Ma < 1.2$:	*transonic flow*, where shock waves first appear, dividing subsonic and supersonic regions of the flow. Powered flight in the transonic region is difficult because of the mixed character of the flow field.
$1.2 < Ma < 3.0$:	*supersonic flow*, where shock waves are present but there are no subsonic regions.
$3.0 < Ma$:	*hypersonic flow* [13], where shock waves and other flow changes are especially strong.

جریان تراکم پذیر

روابط مهم ترمودینامیکی

- نسبت حرارت ویژه

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

- قوانین گاز کامل

$$p = \rho RT \qquad R = c_p - c_v = \text{const} \qquad k = \frac{c_p}{c_v} = \text{const}$$

- برای هوا با M=28.97:

$$R = 1717\ \text{ft}^2/(\text{s}^2 \cdot {}^\circ\text{R}) = 287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}) \qquad k = 1.400$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} = 4293\ \text{ft}^2/(\text{s}^2 \cdot {}^\circ\text{R}) = 718\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

$$c_p = \frac{kR}{k-1} = 6010\ \text{ft}^2/(\text{s}^2 \cdot {}^\circ\text{R}) = 1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

جریان تراکم پذیر

Semnan University

- تغییرات انرژی داخلی و آنتالپی (ظرفیت گرمایی ثابت):

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = c_v(T_2 - T_1) \qquad h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$$

- تغییرات انرژی داخلی و آنتالپی (ظرفیت گرمایی متغیر):

$$\hat{u} = \int c_v \, dT \text{ and } h = \int c_p \, dT$$

- تغییرات آنتروپی برای یک جزء خالص:

$$T\,ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

- با توجه به روابط:

$$dh = c_p \, dT \;, \quad \rho T = p/R$$

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

جریان تراکم پذیر

- رابطه نهایی تغییر آنتروپی:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

- **روابط فرآیند آیزنتروپیک:**

$$s_2 = s_1$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k}$$

- مثال:

Argon flows through a tube such that its initial condition is $p_1 = 1.7$ MPa and $\rho_1 = 18$ kg/m^3 and its final condition is $p_2 = 248$ kPa and $T_2 = 400$ K. Estimate (a) the initial temperature, (b) the final density, (c) the change in enthalpy, and (d) the change in entropy of the gas.

جریان تراکم پذیر

- از جدول A-4 :

$$R = 208\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}) \ , \quad k = 1.67$$

- محاسبه دمای ۱ و فشار ۲

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R} = \frac{1.7\ \text{E6 N/m}^2}{(18\ \text{kg/m}^3)[208\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})]} = 454\ \text{K}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{T_2 R} = \frac{248\ \text{E3 N/m}^2}{(400\ \text{K})[208\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})]} = 2.98\ \text{kg/m}^3$$

- محاسبه تغییرات آنتالپی:

$$c_p = \frac{kR}{k-1} = \frac{1.67(208)}{1.67-1} \approx 519\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 519(400 - 454) \approx -\ 28{,}000\ \text{J/kg (or m}^2/\text{s}^2)$$

- تغییرات آنتروپی:

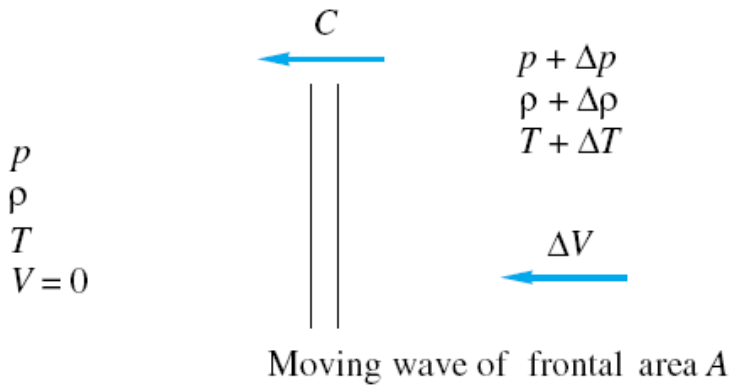
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$= 519 \ln \frac{400}{454} - 208 \ln \frac{0.248\ \text{E6}}{1.7\ \text{E6}} = -66 + 400 \approx 334\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

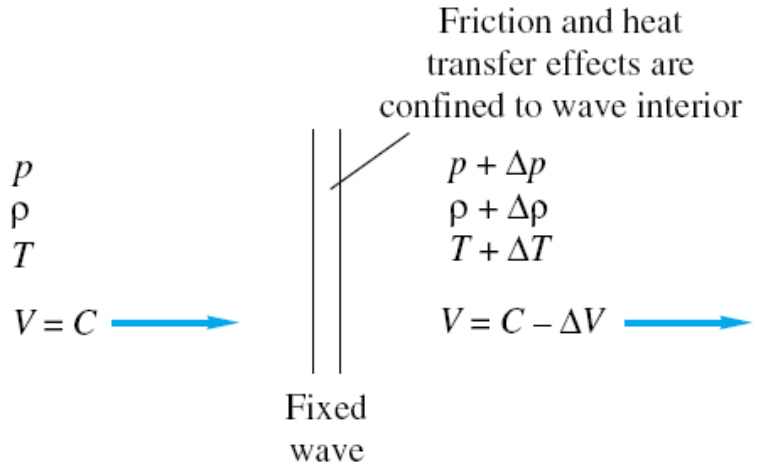
جریان تراکم پذیر

Semnan University

سرعت صوت: نرخ انتشار یک ضربه (پالس) فشار با قدرت ناچیز در سیال ساکن



control volume fixed



control volume moving left at wave speed C.

جریان تراکم پذیر

- معادله بقای جرم با فرض جریان یک بعدی و پایا:

$$\rho AC = (\rho + \Delta\rho)(A)(C - \Delta V)$$

$$\Delta V = C\,\frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho}$$

- معادله بقای مومنتوم با در نظر گرفتن جریان پایا، یک بعدی، ناچیز بودن اصطکاک:

$$\sum F_{\text{right}} = \dot{m}(V_{\text{out}} - V_{\text{in}})$$

$$pA - (p + \Delta p)A = (\rho AC)(C - \Delta V - C)$$

- با ساده سازی معادله و استفاده از بقای جرم:

$$\Delta p = \rho C\,\Delta V$$

- در نتیجه خواهیم داشت:

$$C^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$$

جریان تراکم پذیر

- برای موج با قدرت کم تغییرات چگالی ناچیز است:

$$\Delta\rho \to 0$$

- بنابراین خواهیم داشت:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

- با فرض جریان آینتروپیک:

$$a = \left(\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s\right)^{1/2} = \left(\left. k\,\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T\right)^{1/2}$$

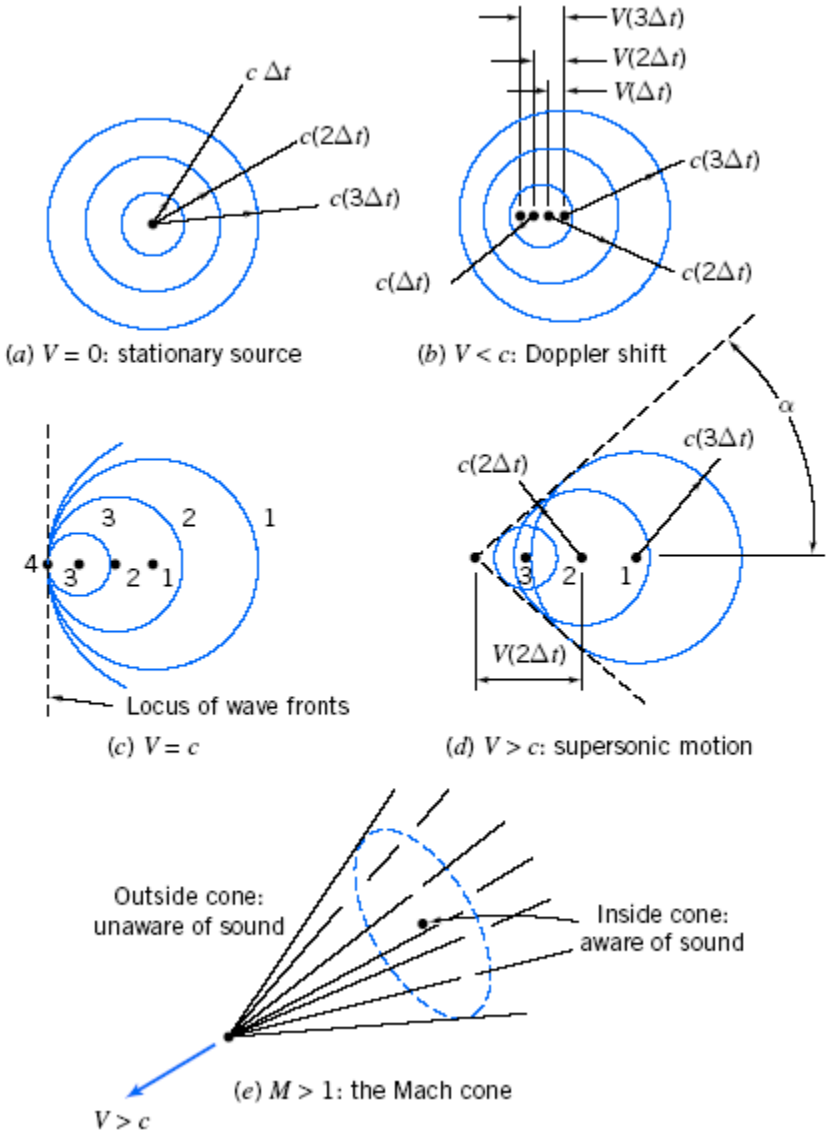
$$a = \left(\frac{kp}{\rho}\right)^{1/2} = (kRT)^{1/2}$$

Table 9.1 Sound Speed of Various Materials at 60°F (15.5°C) and 1 atm

Material	a, ft/s	a, m/s
Gases:		
H_2	4,246	1,294
He	3,281	1,000
Air	1,117	340
Ar	1,040	317
CO_2	873	266
CH_4	607	185
$^{238}UF_6$	297	91
Liquids:		
Glycerin	6,100	1,860
Water	4,890	1,490
Mercury	4,760	1,450
Ethyl alcohol	3,940	1,200
Solids:*		
Aluminum	16,900	5,150
Steel	16,600	5,060
Hickory	13,200	4,020
Ice	10,500	3,200

جریان تراکم پذیر

انتشار امواج صوتی در سرعت های مختلف



جریان تراکم پذیر

حالت مرجع: خواص سکون آیزنتروپیک محلی

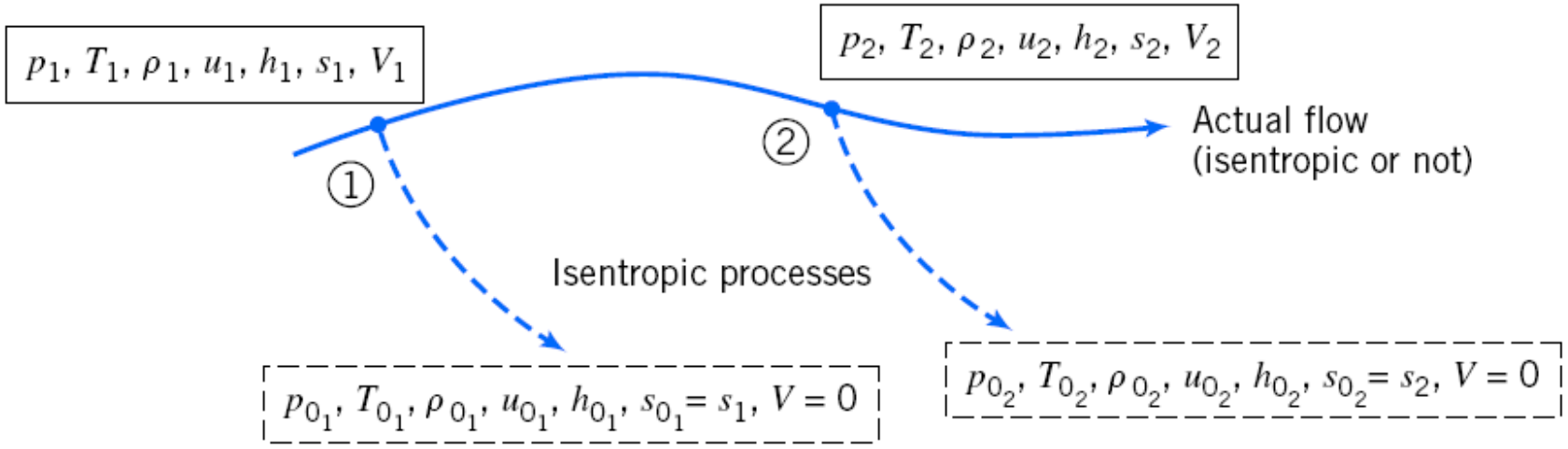
- حالت سکون آیزنتروپیک مرجع در جریان تراکم ناپذیر، پایا و بدون اصطکاک از معادله برنولی قابل محاسبه است:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

- این معادله برای جریان تراکم پذیر معتبر نیست.

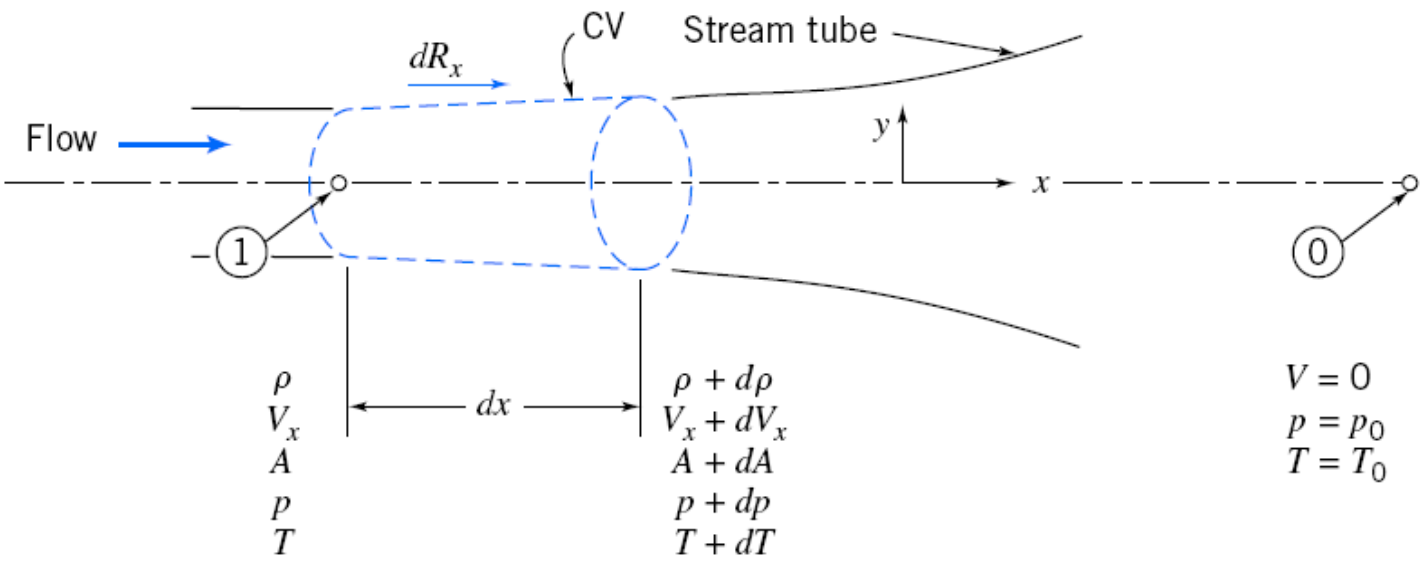
- مفهوم خواص سکون آیزنتروپیک:



Local isentropic stagnation properties.

جریان تراکم پذیر

معادلات حاکم: تحلیل انتگرالی



Compressible flow in an infinitesimal stream tube.

بقای جرم:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}^{=0(1)} \int_{CV} \rho \, d\forall + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

فرضیات

(1) Steady flow.
(2) Uniform flow at each section.

جریان تراکم پذیر

$$(-\rho V_x A) + \{(\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)\} = 0$$

- شکل نهایی بقای جرم:

$$\rho V_x A = (\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)$$

- بقای مومنتوم:

فرضیات
(3) $F_{B_x} = 0$.
(4) Frictionless flow.

$$= 0(3) = 0(1)$$

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} V_x \, \rho d\forall + \int_{CS} V_x \, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

- نیروهای سطحی وارد بر حجم کنترل:

$$F_{S_x} = dR_x + pA - (p + dp)(A + dA)$$

- با محاسبه dRx:

$$F_{S_x} = \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA + pA - (p + dp)(A + dA)$$

جریان تراکم پذیر

- رابطه نهایی نیروهای سطحی

$$F_{S_x} = p\,dA + \frac{dp\,dA}{2} + pA - pA - dp\,A - p\,dA - dp\,dA$$

($\frac{dp\,dA}{2} \approx 0$, $dp\,dA \approx 0$)

$$F_{S_x} = -\,dp\,A$$

- با جایگذاری رابطه نیروی سطحی در معادله مومنتوم خواهیم داشت:

$$-\,dp\,A = V_x\{-\rho V_x A\} + (V_x + dV_x)\{(\rho + d\rho)(V_x + dV_x)(A + dA)\}$$

- با ساده سازی از طریق معادله پیوستگی رابطه زیر به دست می آید:

$$-\,dp\,A = (-V_x + V_x + dV_x)(\rho V_x A)$$

$$dp = -\rho V_x dV_x = -\rho\, d\left(\frac{V_x^2}{2}\right)$$

- معادله نهایی و مهم تغییر فشار و سرعت:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) = 0$$

جریان تراکم پذیر

- شکل نهایی معادله مومنتوم:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) = 0$$

- از طرف دیگر برای جریان آیزنتروپیک:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constant}$$

$$p = C\rho^k \quad \text{and} \quad \rho = p^{1/k}\, C^{-1/k}$$

- با جایگذاری در معادله مومنتوم:

$$-d\left(\frac{V^2}{2}\right) = \frac{dp}{\rho} = p^{-1/k} C^{1/k} dp$$

- انتگرال گیری برای محاسبه خواص سکون:

$$-\int_V^0 d\left(\frac{V^2}{2}\right) = C^{1/k} \int_p^{p_0} p^{-1/k} dp$$

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k} \frac{k}{k-1} \left[p^{(k-1)/k}\right]_p^{p_0} = C^{1/k} \frac{k}{k-1} \left[p_0^{(k-1)/k} - p^{(k-1)/k}\right]$$

$$\frac{V^2}{2} = C^{1/k} \frac{k}{k-1} p^{(k-1)/k} \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

جریان تراکم پذیر

- با جابگذاری رابطه $C^{1/k} = p^{1/k}/\rho$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p^{1/k}}{\rho}p^{(k-1)/k}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

- با مرتب سازی معادله بر حسب فشار:

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(k-1)/k} = 1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho}{p}\frac{V^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{k}\frac{\rho V^2}{2p}\right]^{k/(k-1)}$$

- با توجه به معادله حالت $p = \rho RT$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{kRT}\right]^{k/(k-1)}$$

- با جایگذاری رابطه سرعت صوت $c = \sqrt{kRT}$

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right]^{k/(k-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)}$$

جریان تراکم پذیر

- با استفاده از روابط جریان آیزنتروپیک و ومعادله حالت:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constant} \qquad \frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k \quad \text{and} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}$$

- می توانیم خواص سکون آیزنتروپیک فشار، چگالی و دما را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/(k-1)}$$

جریان تراکم پذیر

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]^{1/(k-1)}$$

- خواص سکون آیزنتروپیک برای هوا(k=1.4):

$$\frac{T_0}{T} = 1 + 0.2\ \mathrm{Ma}^2 \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = (1 + 0.2\ \mathrm{Ma}^2)^{2.5}$$

$$\frac{p_0}{p} = (1 + 0.2\ \mathrm{Ma}^2)^{3.5}$$

جریان تراکم پذیر

- شرایط بحرانی (M=1.0) برای هوا:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0.5283 \qquad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} = 0.6339$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0.8333 \qquad \frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2} = 0.9129$$

- سرعت بحرانی:

$$V^* = a^* = (kRT^*)^{1/2} = \left(\frac{2k}{k+1} RT_0\right)^{1/2}$$

جریان تراکم پذیر

➢ مثال:

Air flows adiabatically through a duct. At point 1 the velocity is 240 m/s, with $T_1 = 320$ K and $p_1 = 170$ kPa. Compute (*a*) T_0, (*b*) p_{01}, (*c*) ρ_0, (*d*) Ma, (*e*) V_{max}, and (*f*) V^*. At point 2 further downstream $V_2 = 290$ m/s and $p_2 = 135$ kPa. (*g*) What is the stagnation pressure p_{02}?

➢ حل:

➢ برای هوا:

$k = 1.4$, $c_p = 1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$, and $R = 287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$.

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 320 + \frac{(240\ \text{m/s})^2}{2[1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})]} = 320 + 29 = 349\ \text{K}$$

$$\text{Ma}_1^2 = 5\left(\frac{349}{320} - 1\right) = 0.453 \qquad \text{Ma}_1 = 0.67$$

$a_1 = \sqrt{kRT_1} = 359$ m/s, whence $\text{Ma}_1 = V_1/a_1 = 240/359 = 0.67$. The

$$p_{01} = p_1(1 + 0.2\ \text{Ma}_1^2)^{3.5} = (170\ \text{kPa})[1 + 0.2(0.67)^2]^{3.5} = 230\ \text{kPa} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

جریان تراکم پذیر

from the perfect-gas law

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{170{,}000}{(287)(320)} = 1.85 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{01} = \rho_1(1 + 0.2\,\text{Ma}_1^2)^{2.5} = (1.85)[1 + 0.2(0.67)^2]^{2.5} = 2.29 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_0 = p_0/(RT_0) = (230\,\text{E3})/[(287)(349)] = 2.29\,\text{kg/m}^3.$$

$$V_{\max} = (2c_pT_0)^{1/2} = [2(1005)(349)]^{1/2} = 838 \text{ m/s}$$

from Eq. (9.33) is

$$V^* = \left(\frac{2k}{k+1}RT_0\right)^{1/2} = \left[\frac{2(1.4)}{1.4+1}(287)(349)\right]^{1/2} = 342 \text{ m/s}$$

At point 2, the temperature is not given, but since we know the flow is adiabatic, the stagnation temperature is constant: $T_{02} = T_{01} = 349$ K. Thus, from Eq. (9.23),

$$T_2 = T_{02} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 349 - \frac{(290)^2}{2(1005)} = 307 \text{ K}$$

جریان تراکم پذیر

$$p_{02} = p_2\left(\frac{T_{02}}{T_2}\right)^{k/(k-1)} = (135)\left(\frac{349}{307}\right)^{3.5} = 211 \text{ kPa}$$

جریان تراکم پذیر

- مثال: نشان دهید که اثارات تراکم پذیری برای جریان با Ma>0.3 مهم است.
- روابط نقطه سکون:

Incompressible $$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Compressible $$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2}M^2\right]^{k/(k-1)}$$

- برای جریان تراکم ناپذیر:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\rho V^2}{2p} = 1 + \frac{V^2}{2RT} = 1 + \frac{kV^2}{2kRT} = 1 + \frac{kV^2}{2c^2}$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2$$

- در جریان تراکم پذیر با استفاده از قضیه دوجمله ای:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots, |x| < 1$$

$x = [(k-1)/2]M^2$, and $n = k/(k-1)$.

جریان تراکم پذیر

- با انجام عملیات جبری:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left[\frac{k-1}{2}M^2\right] + \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\frac{1}{2!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^2$$
$$+ \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k}{k-1}-1\right)\left(\frac{k}{k-1}-2\right)\frac{1}{3!}\left[\frac{k-1}{2}M^2\right]^3 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{k}{2}M^2 + \frac{k}{8}M^4 + \frac{k(2-k)}{48}M^6 + \cdots$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}M^2\left[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{(2-k)}{24}M^4 + \cdots\right]$$

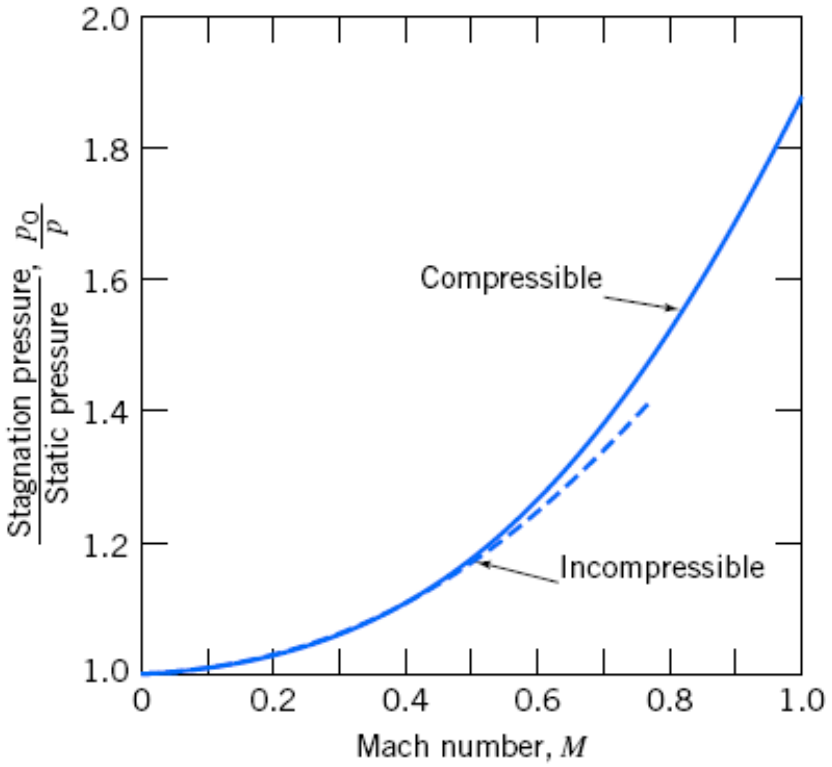
- بنابراین:

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2}M^2 \quad (\text{“incompressible”})$$

$$\frac{p_0}{p} - 1 = \frac{k}{2}M^2\left[1 + \frac{1}{4}M^2 + \frac{(2-k)}{24}M^4 + \cdots\right] \quad (\text{compressible})$$

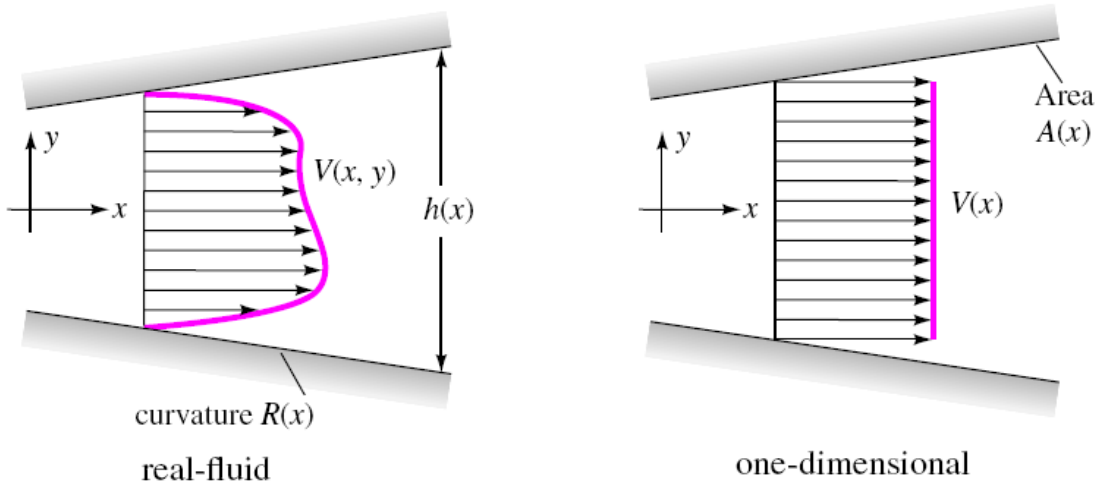
جریان تراکم پذیر

- مقایسه نتایج جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر:



جریان تراکم پذیر

اثر تغییر سطح مقطع در جریان آیزنتروپیک:



- معادله بقای جرم در جریان یک بعدی:

$$\rho(x)V(x)A(x) = \dot{m} = \text{const}$$

- با مشتق گیری و تقسیم بر ρAV خواهیم داشت:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

جریان تراکم پذیر

- بر حسب تغییر مساحت:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}$$

- معادله مومنتوم در جریان تراکم پذیر:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = -\rho V\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}$$

- با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه تغییر سطح:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} - \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{dp/d\rho}\right]$$

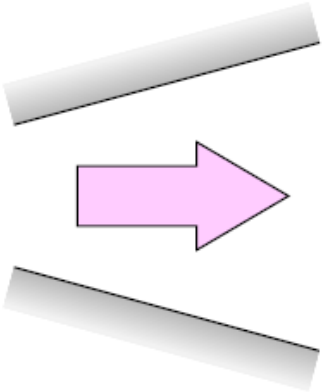
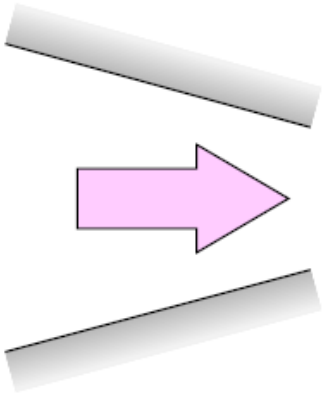
- با توجه به رابطه سرعت صوت:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2}\left[1 - \frac{V^2}{c^2}\right] = \frac{dp}{\rho V^2}[1 - M^2]$$

جریان تراکم پذیر

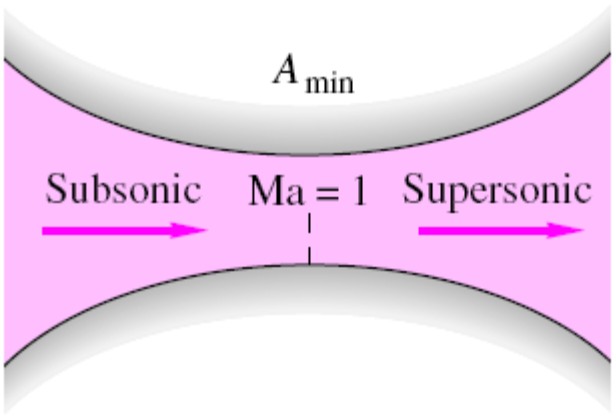
شکل نهایی معادله:

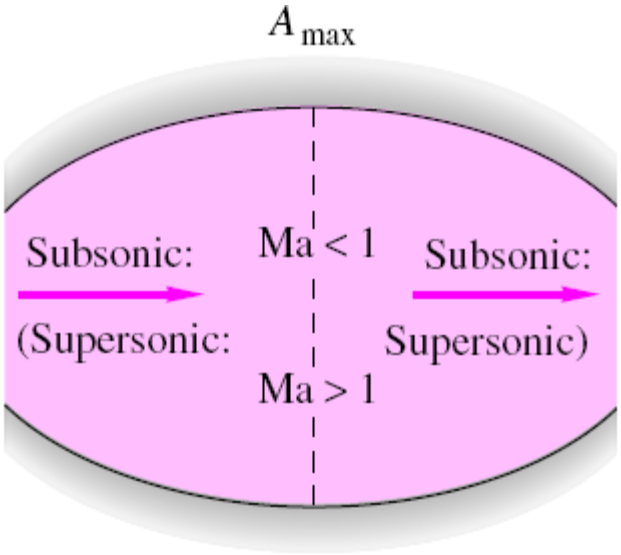
$$\frac{dp}{\rho V^2} = \frac{dA}{A}\frac{1}{[1-M^2]} \quad , \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A}\frac{1}{[1-M^2]}$$

Duct geometry		Subsonic Ma < 1	Supersonic Ma > 1
	$dA > 0$	$dV < 0$ $dp > 0$ Subsonic diffuser	$dV > 0$ $dp < 0$ Supersonic nozzle
	$dA < 0$	$dV > 0$ $dp < 0$ Subsonic nozzle	$dV < 0$ $dp > 0$ Supersonic diffuser

جریان تراکم پذیر

- با توجه به روابط به دست آمده، تبدیل جریان مادون صوت به جریان مافوق صوت از طریق نازل هم گرا–واگرا امکان پذیر است





جریان تراکم پذیر

جریان آیزنتروپیک-روابط در گلوگاه

- بقای جرم بین یک نقطه از کانال و گلوگاه:

$$\rho V A = \rho^* V^* A^* \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V}$$

- با جایگذاری روابط نسبت چگالی و نسبت سرعت:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{\frac{2}{k+1}\left[1 + \frac{1}{2}(k-1)\,\mathrm{Ma}^2\right]\right\}^{1/(k-1)}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{(kRT^*)^{1/2}}{V} = \frac{(kRT)^{1/2}}{V}\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{1/2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left\{\frac{2}{k+1}\left[1 + \frac{1}{2}(k-1)\,\mathrm{Ma}^2\right]\right\}^{1/2}$$

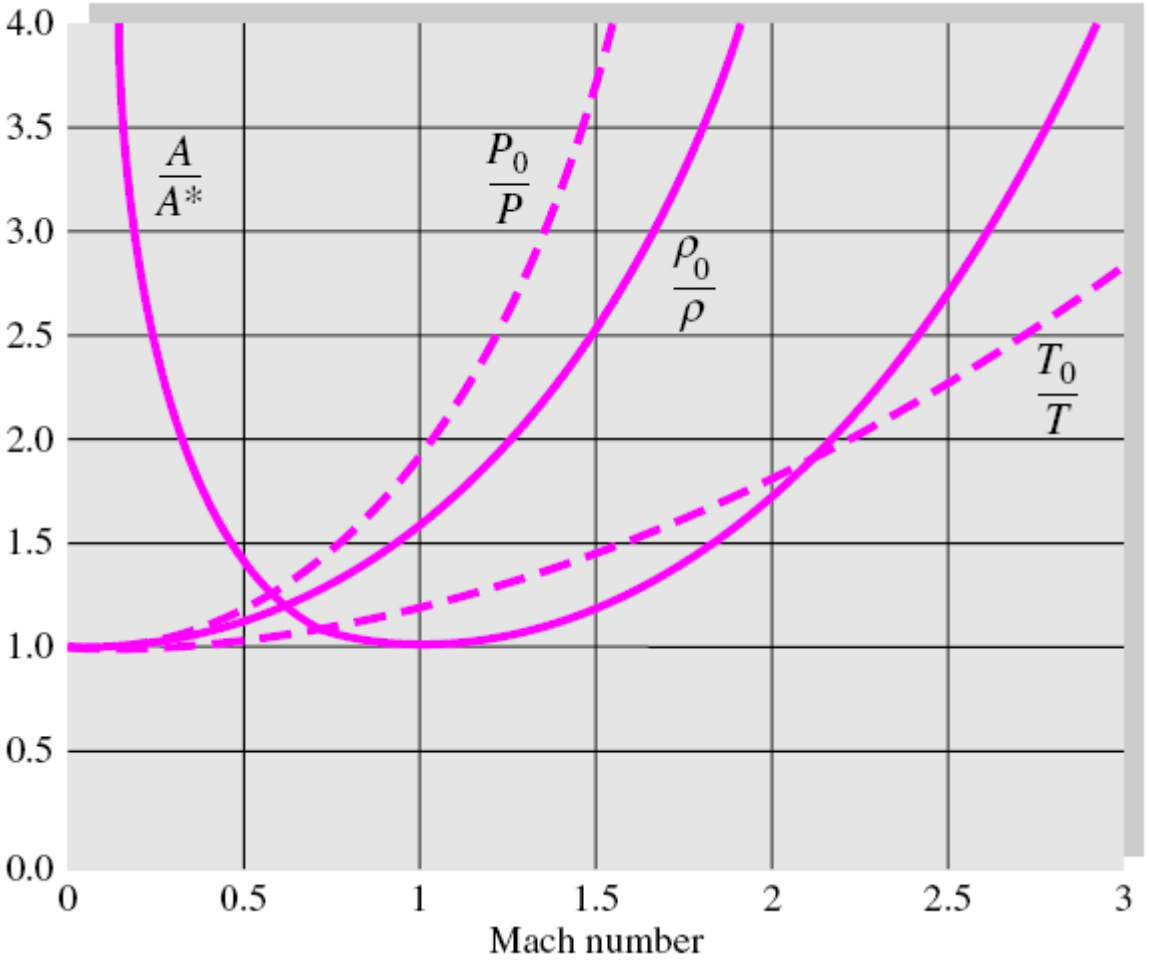
- رابطه نهایی به شکل زیر به دست می آید:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\frac{1}{2}(k+1)}\right]^{(1/2)(k+1)/(k-1)}$$

جریان تراکم پذیر

برای هوا:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}} \frac{(1 + 0.2\,\mathrm{Ma}^2)^3}{1.728}$$



جریان تراکم پذیر

پدیده خفگی (Choking)

- حداکثر دبی جریان در کانال با سطح مقطع متغیر زمانی رخ می دهد که عدد ماخ در گلوگاه برابر یک باشد.

$$\rho VA = \rho^* V^* A^*$$

- دبی حداکثر بر حسب پارامترهای سکون از رابطه قابل محاسبه است:

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = \rho_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} A^* \left(\frac{2k}{k+1} RT_0\right)^{1/2}$$

$$= k^{1/2} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(1/2)(k+1)/(k-1)} A^* \rho_0 (RT_0)^{1/2}$$

- برای هوا (k=1.4):

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847 A^* \rho_0 (RT_0)^{1/2} = \frac{0.6847 p_0 A^*}{(RT_0)^{1/2}}$$

جریان تراکم پذیر

دبی موضعی جرمی:

- مشابه رابطه دبی ماکزیمم در گلوگاه می توان دبی جریان را در هر مقطع از یک کانال محاسبه نمود:
- رابطه نهایی:

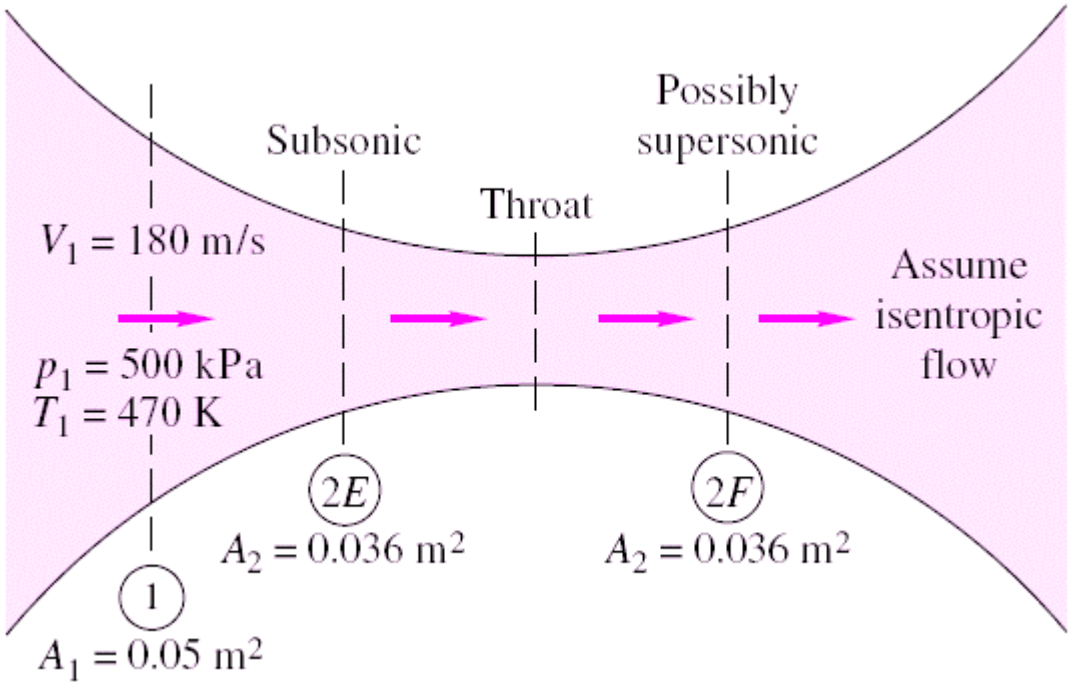
$$\text{Mass flow function} = \frac{\dot{m}}{A}\frac{\sqrt{RT_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/k}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right]}$$

p/p_0	1.0	0.98	0.95	0.9	0.8	0.7	0.6	≤0.5283
Function	0.0	0.1978	0.3076	0.4226	0.5607	0.6383	0.6769	0.6847

جریان تراکم پذیر

مثال

Air flows isentropically through a duct. At section 1 the area is 0.05 m^2 and $V_1 = 180$ m/s, $p_1 = 500$ kPa, and $T_1 = 470$ K. Compute (*a*) T_0, (*b*) Ma_1, (*c*) p_0, and (*d*) both A^* and $\dot{m}$. If at section 2 the area is 0.036 m^2, compute Ma_2 and p_2 if the flow is (*e*) subsonic or (*f*) supersonic. Assume $k = 1.4$.



جریان تراکم پذیر

$$h + \tfrac{1}{2}V^2 = h_0 = \text{const} \qquad c_pT + \tfrac{1}{2}V^2 = c_pT_0$$

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 470 + \frac{(180)^2}{2(1005)} = 486\ \text{K} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

The local sound speed $a_1 = \sqrt{kRT_1} = [(1.4)(287)(470)]^{1/2} = 435$ m/s. Hence

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{180}{435} = 0.414 \qquad \textit{Ans. (b)}$$

With Ma_1 known, the stagnation pressure follows from Eq. (9.34):

$$p_0 = p_1(1 + 0.2\,\text{Ma}_1^2)^{3.5} = (500\ \text{kPa})[1 + 0.2(0.414)^2]^{3.5} = 563\ \text{kPa} \qquad \textit{Ans. (c)}$$

Similarly, from Eq. (9.45), the critical sonic throat area is

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{(1 + 0.2\,\text{Ma}_1^2)^3}{1.728\,\text{Ma}_1} = \frac{[1 + 0.2(0.414)^2]^3}{1.728(0.414)} = 1.547$$

or

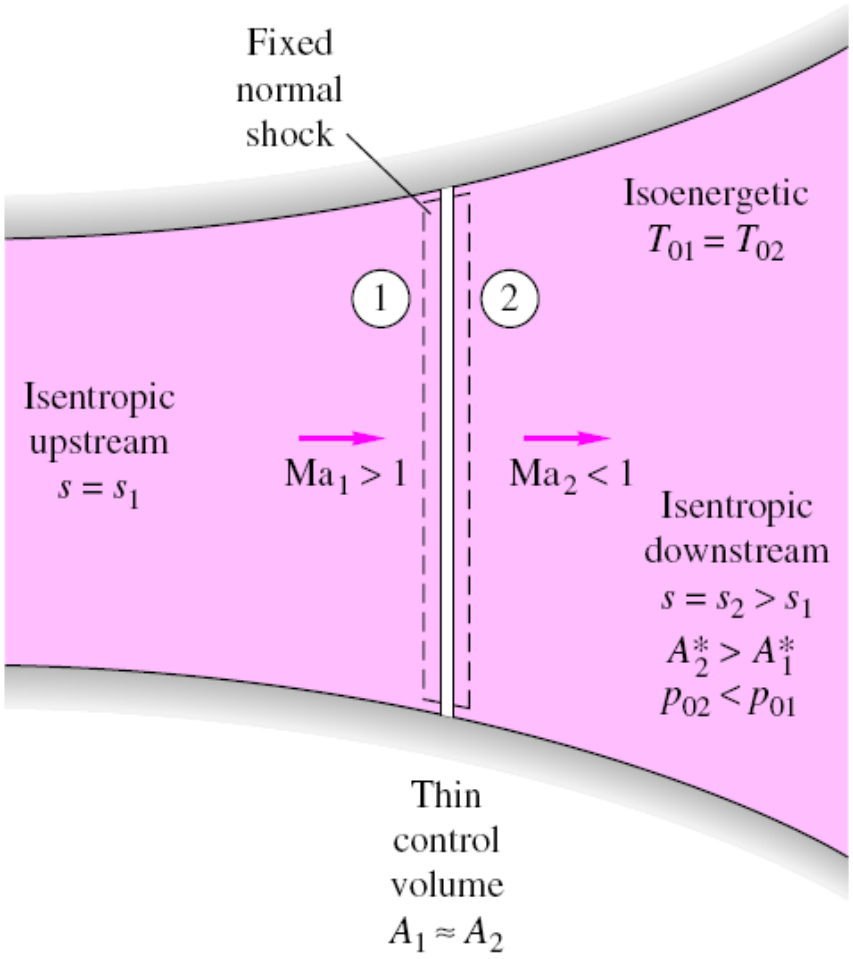
$$A^* = \frac{A_1}{1.547} = \frac{0.05\ \text{m}^2}{1.547} = 0.0323\ \text{m}^2 \qquad \textit{Ans. (d)}$$

$$\dot{m} = 0.6847\frac{p_0A^*}{\sqrt{RT_0}} = 0.6847\frac{(563{,}000)(0.0323)}{\sqrt{(287)(486)}} = 33.4\ \text{kg/s}$$

جریان تراکم پذیر

شوک نرمال:

- تحول بازگشت ناپذیر در جریان مافوق صوت که منجر به افزایش فشار و کاهش سرعت می شود.



جریان تراکم پذیر

شوک نرمال:

- معادلات حاکم:
- تحلیل معادلات شوک اولین بار توسط رنکین–هوگونیوت انجام شد

Continuity: $$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{const}$$

Momentum: $$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

Energy: $$h_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 = h_0 = \text{const}$$

Perfect gas: $$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

Constant c_p: $$h = c_p T \qquad k = \text{const}$$

جریان تراکم پذیر

شوک نرمال:

- با حذف سرعت های V_1 و V_2 از سه معادله اول خواهیم داشت:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right)$$

- با در نظر گرفتن رابطه آنتالپی و رابطه تغییر فشار و چگالی در جریان غیر آیزنتروپیک:

$$h = c_p T = kp/[(k-1)\rho]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta p_2/p_1}{\beta + p_2/p_1} \qquad \beta = \frac{k+1}{k-1}$$

- رابطه تغییر آنتروپی در تحول شوک به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k\right]$$

جریان تراکم پذیر

شوک نرمال:

- برای هوا (k=1.4) نتایج زیر به دست می آید:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \beta p_2/p_1}{\beta + p_2/p_1} \qquad \beta = \frac{k+1}{k-1} \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}$$

$\frac{p_2}{p_1}$	ρ_2/ρ_1		$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$
	Eq. (9.51)	Isentropic	
0.5	0.6154	0.6095	−0.0134
0.9	0.9275	0.9275	−0.00005
1.0	1.0	1.0	0.0
1.1	1.00704	1.00705	0.00004
1.5	1.3333	1.3359	0.0027
2.0	1.6250	1.6407	0.0134

جریان تراکم پذیر

شوک نرمال:

- روابط عدد ماخ:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - (k-1)\right]$$

$$\mathrm{Ma}_2^2 = \frac{(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - (k-1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{(k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2} = \frac{V_1}{V_2}$$

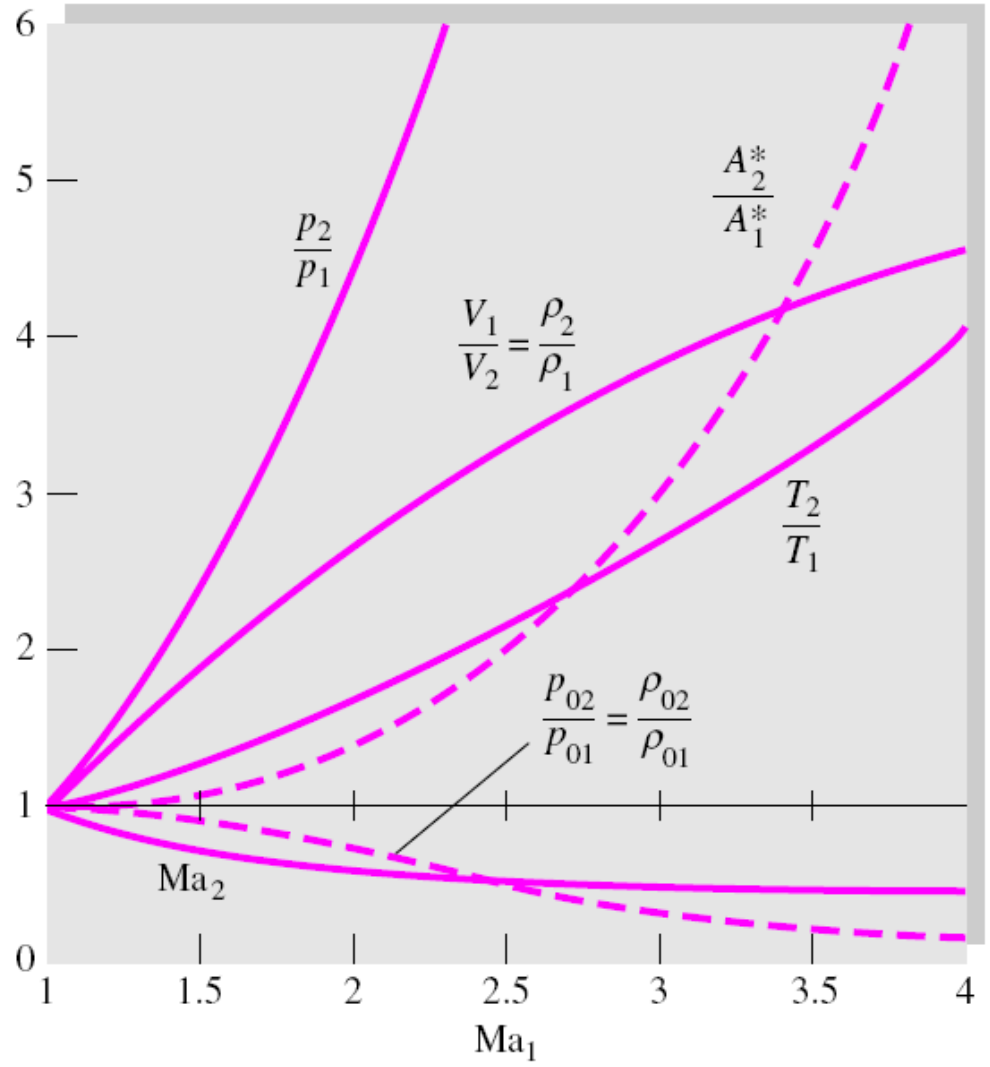
$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2\right]\frac{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2\,\mathrm{Ma}_1^2}$$

$$T_{02} = T_{01}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}\right]^{k/(k-1)}\left[\frac{k+1}{2k\,\mathrm{Ma}_1^2 - (k-1)}\right]^{1/(k-1)}$$

جریان تراکم پذیر

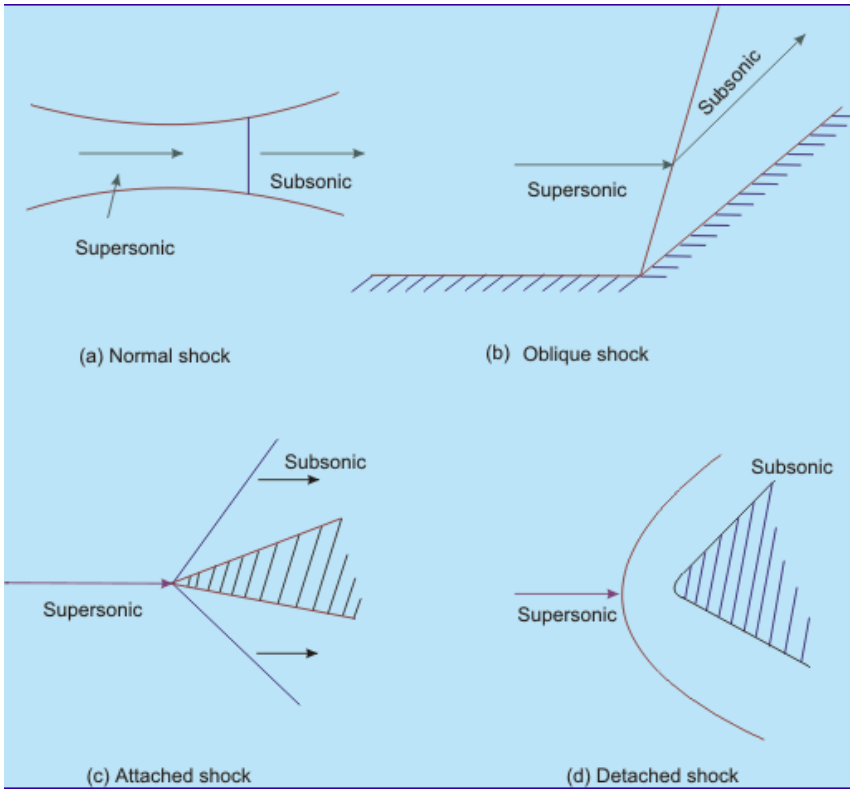
- تغییرات خواص جریان هوا در شوک نرمال



جریان تراکم پذیر

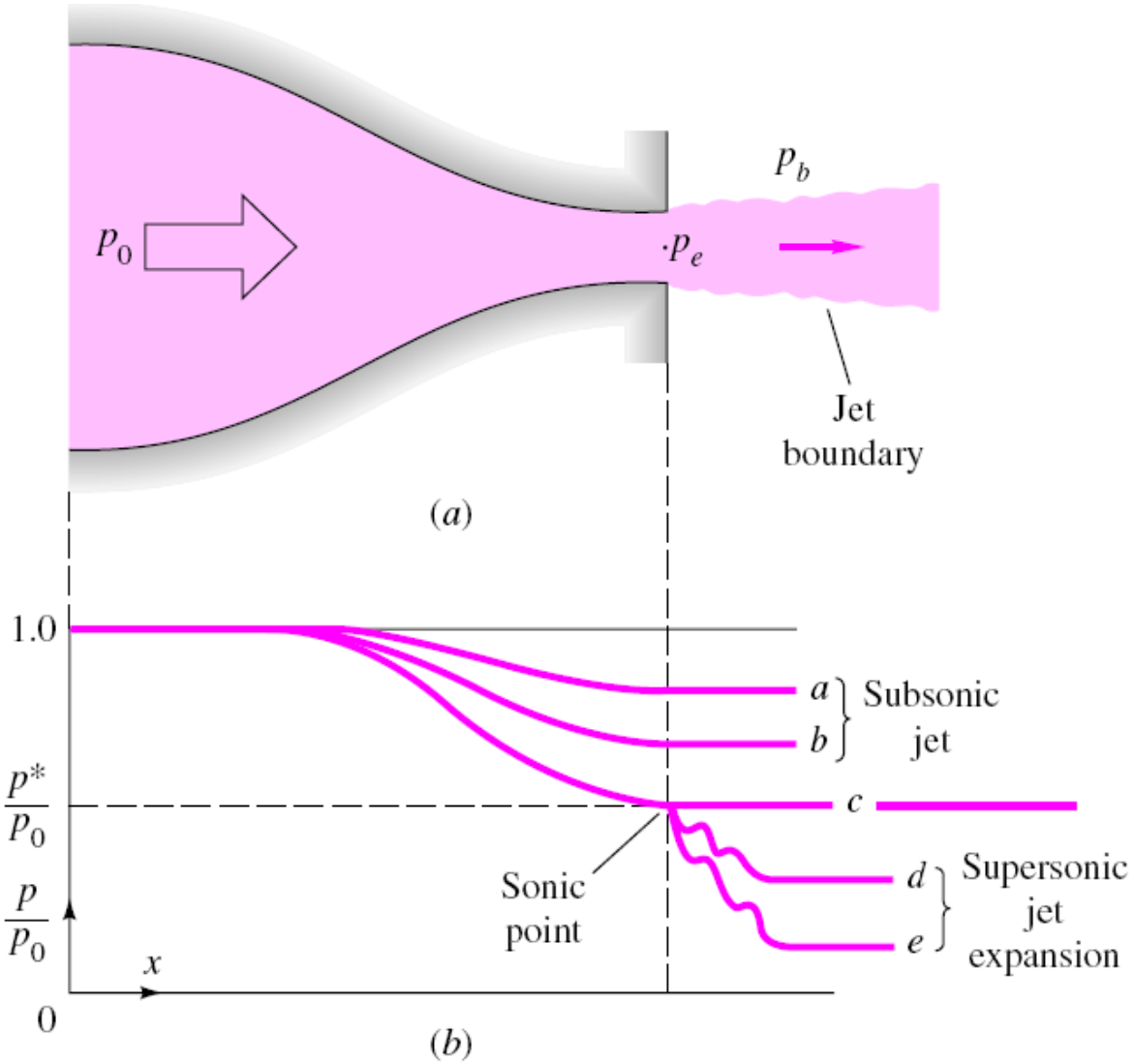
تاثیر از شوک :

- افزایش آنتروپی
- تبدیل جریان مافوق صوت به مادون صوت
- عدم بازگشت پذیری



جریان تراکم پذیر

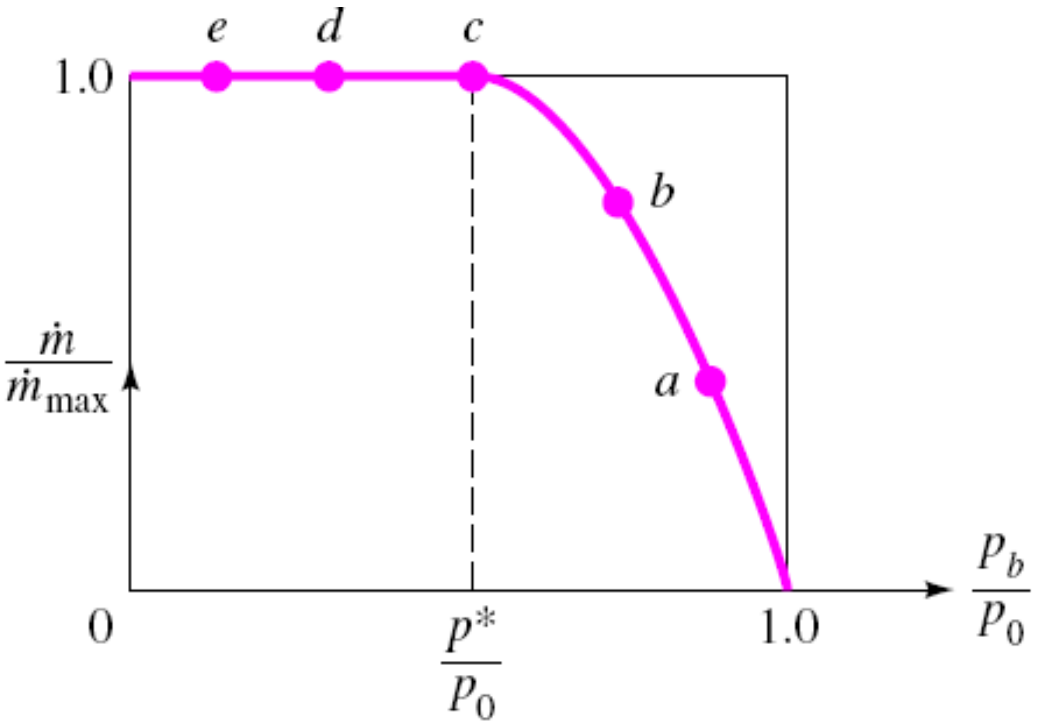
جریان تراکم پذیر در نازل هم گرا:



جریان تراکم پذیر

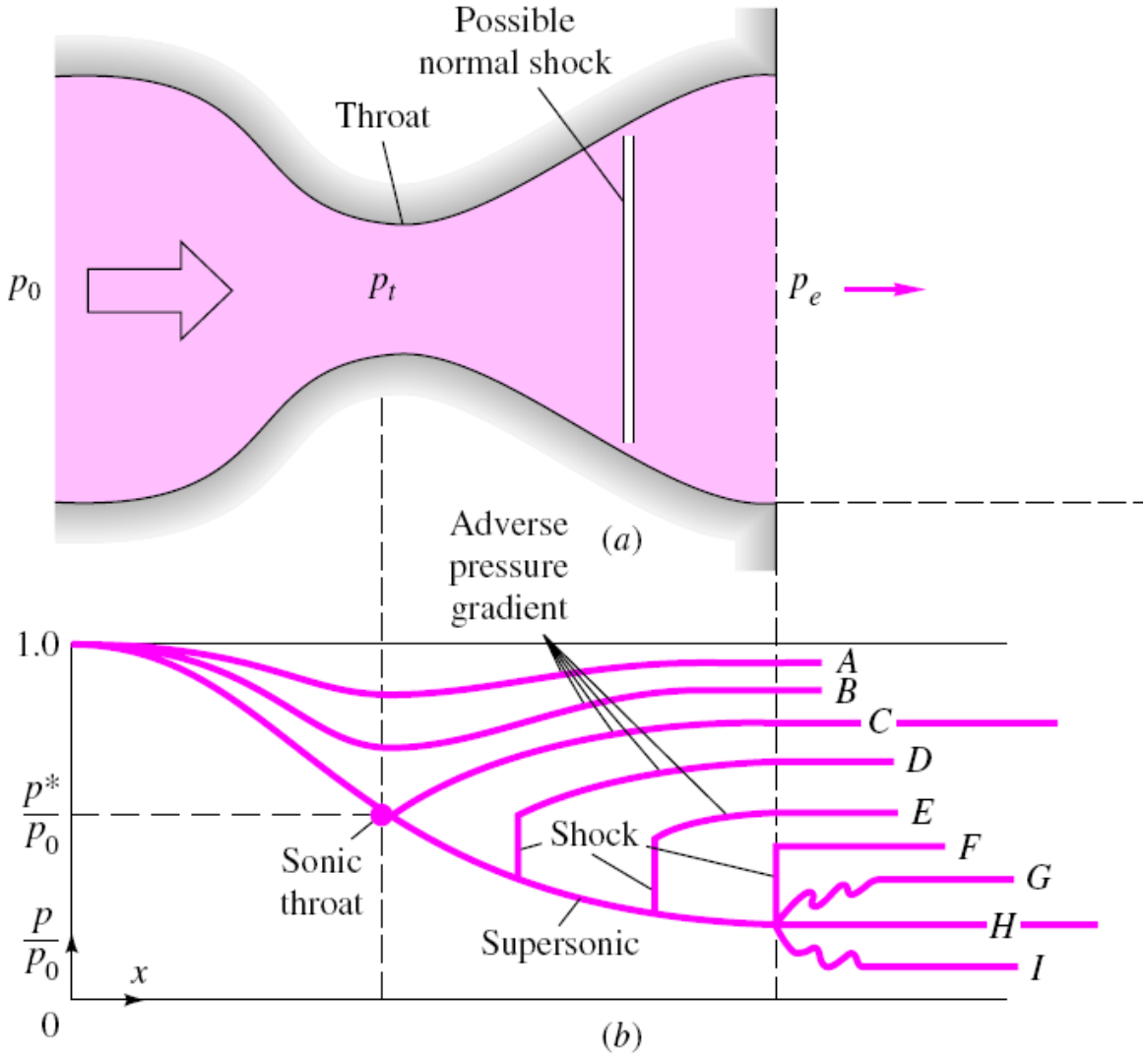
Semnan University

تغییرات دبی و تحول خفگی در نازل هم گرا:



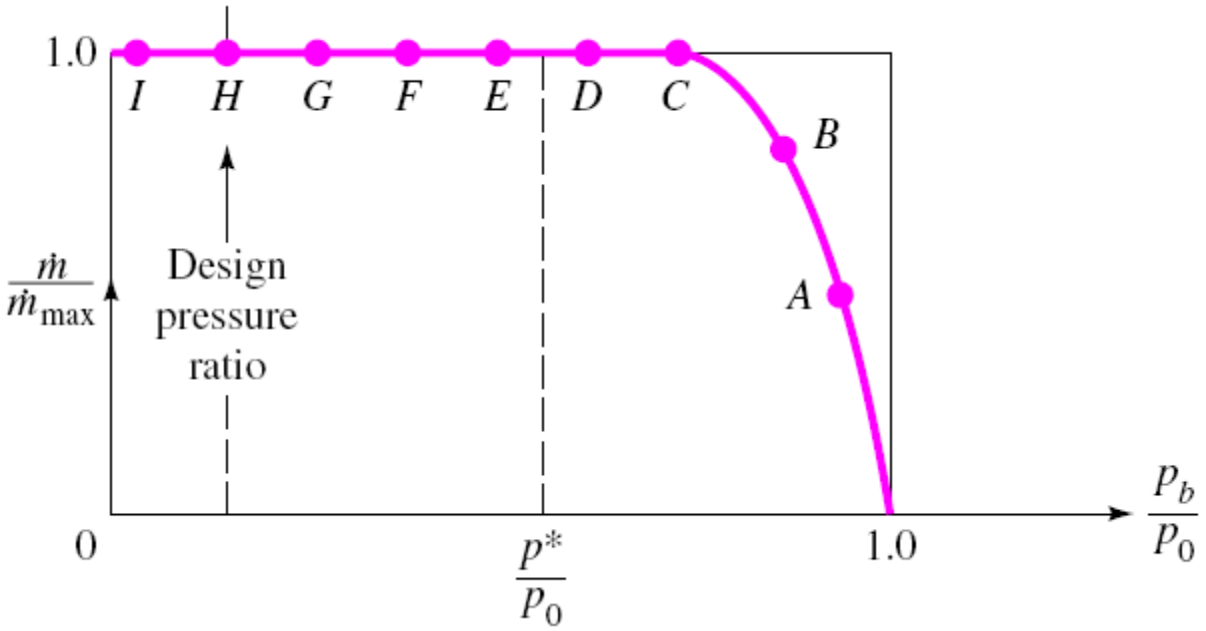
جریان تراکم پذیر

جریان تراکم پذیر در نازل هم گرا-واگرا:



جریان تراکم پذیر

تغییرات دبی و پدیده خفگی در نازل هم گرا-واگرا:



جریان تراکم پذیر

مثال:

A converging–diverging nozzle (Fig. 9.12*a*) has a throat area of 0.002 m^2 and an exit area of 0.008 m^2. Air stagnation conditions are $p_0 = 1000$ kPa and $T_0 = 500$ K. Compute the exit pressure and mass flow for (*a*) design condition and the exit pressure and mass flow if (*b*) $p_b \approx 300$ kPa and (*c*) $p_b \approx 900$ kPa. Assume $k = 1.4$.

$A_e/A_t = 0.008/0.002 = 4.0.$

$$\mathrm{Ma}_{e,\mathrm{design}} \approx 2.95$$

The design pressure ratio follows from Eq. (9.34):

$$\frac{p_0}{p_e} = [1 + 0.2(2.95)^2]^{3.5} = 34.1$$

or

$$p_{e,\mathrm{design}} = \frac{1000\ \mathrm{kPa}}{34.1} = 29.3\ \mathrm{kPa} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

Since the throat is clearly sonic at design conditions, Eq. (9.46*b*) applies:

$$\dot{m}_{\mathrm{design}} = \dot{m}_{\max} = \frac{0.6847 p_0 A_t}{(RT_0)^{1/2}} = \frac{0.6847(10^6\ \mathrm{Pa})(0.002\ \mathrm{m}^2)}{[287(500)]^{1/2}} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

$$= 3.61\ \mathrm{kg/s}$$

جریان تراکم پذیر

P_b=300 kPa (b

- در این حالت با توجه به مقدار فشار جریان خرجی از کانال نمی تواند مافوق صوت باشد
- اما جریان در گلوگاه صوتی است و شوک بعد از آن رخ داده است.
- این حالت متناظر با منحنی E در شکل می باشد

$$\text{Ma}_1 = 2.95 \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2.4}[2.8(2.95)^2 - 0.4] = 9.99$$

or

$$p_2 = 9.99p_1 = 9.99p_{e,\text{design}} = 293 \text{ kPa}$$

Since this is less than the given $p_b = 300$ kPa, there is a normal shock just upstream of the exit plane (condition E). The exit flow is subsonic and equals the back pressure:

$$p_e = p_b = 300 \text{ kPa} \qquad \textit{Ans. } (b)$$

Also

$$\dot{m} = \dot{m}_{\max} = 3.61 \text{ kg/s} \qquad \textit{Ans. } (b)$$

The throat is still sonic and choked at its maximum mass flow.

جریان تراکم پذیر

P_b=900 kPa (c

- در این حالت نیز با توجه به مقدار فشار جریان خرجی از کانال نمی تواند مافوق صوت باشد
- این حالت نزدیک منحنی C در شکل می باشد
- در این حالت شوک رخ داده است

$$\mathrm{Ma}_e(C) \approx 0.147 \qquad (\text{exact} = 0.14655)$$

Then the isentropic exit pressure ratio for this condition is

$$\frac{p_0}{p_e} = [1 + 0.2(0.147)^2]^{3.5} = 1.0152 \qquad p_e = \frac{1000}{1.0152} = 985 \text{ kPa}$$

The given back pressure of 900 kPa is less than this value, corresponding roughly to condition *D* in Fig. 9.12*b*. Thus for this case there is a normal shock just downstream of the throat, and the throat is choked:

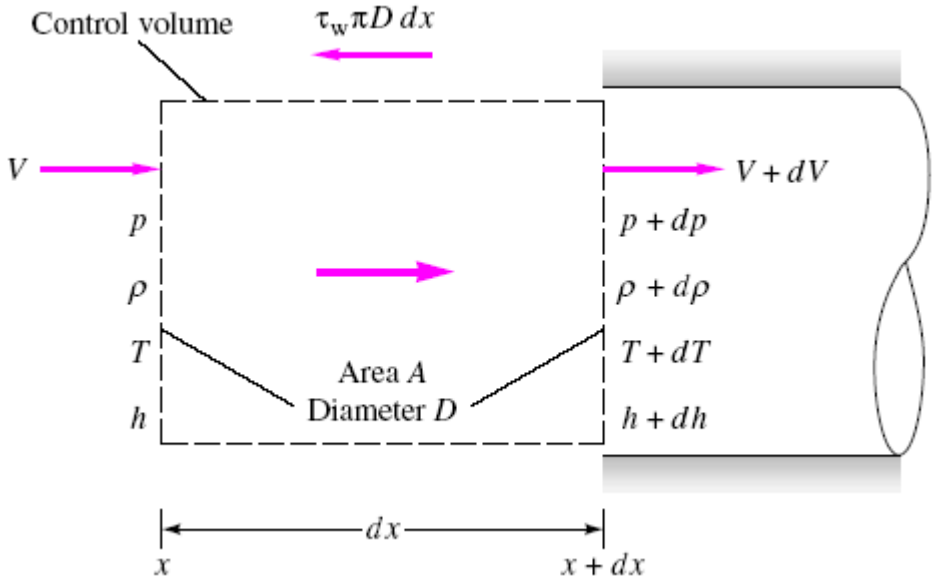
$$p_e = p_b = 900 \text{ kPa} \qquad \dot{m} = \dot{m}_{\max} = 3.61 \text{ kg/s} \qquad \textit{Ans. } (c)$$

جریان تراکم پذیر

جریان تراکم پذیر در کانال با اصطکاک و بدون انتقال حرارت:

فرضیات:

- جریان یک بعدی، پایا و آدیاباتیک
- گاز کامل با خواص فیزیکی ثابت
- جریان در کانال با سطح مقطع ثابت
- صرف نظر از کار و هر گونه تغییرات انرژی
- محاسبه اصطکاک از رابطه دارسی



جریان تراکم پذیر

معادلات حاکم:

Continuity: $$\rho V = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{const}$$

or $$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \qquad (9.60a)$$

x momentum: $$pA - (p + dp)A - \tau_w \pi D\, dx = \dot{m}(V + dV - V)$$

or $$dp + \frac{4\tau_w dx}{D} + \rho V\, dV = 0 \qquad (9.60b)$$

Energy: $$h + \tfrac{1}{2}V^2 = h_0 = c_p T_0 = c_p T + \tfrac{1}{2}V^2$$

or $$c_p\, dT + V\, dV = 0 \qquad (9.60c)$$

Since these three equations have five unknowns—p, ρ, T, V, and τ_w—we need two additional relations. One is the perfect-gas law:

$$p = \rho RT \quad \text{or} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \qquad (9.61)$$

To eliminate τ_w as an unknown, it is assumed that wall shear is correlated by a local Darcy friction factor f

$$\tau_w = \tfrac{1}{8} f \rho V^2 = \tfrac{1}{8} f k p\, \text{Ma}^2 \qquad (9.62)$$

جریان تراکم پذیر

- با انجام چند مرحله عملیات جبری خواهیم داشت:
- سمت چپ معادله از جدول B3 قابل محاسبه است

$$\frac{\bar{f}L^*}{D} = \frac{1 - \mathrm{Ma}^2}{k\,\mathrm{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k} \ln \frac{(k+1)\,\mathrm{Ma}^2}{2 + (k-1)\,\mathrm{Ma}^2}$$

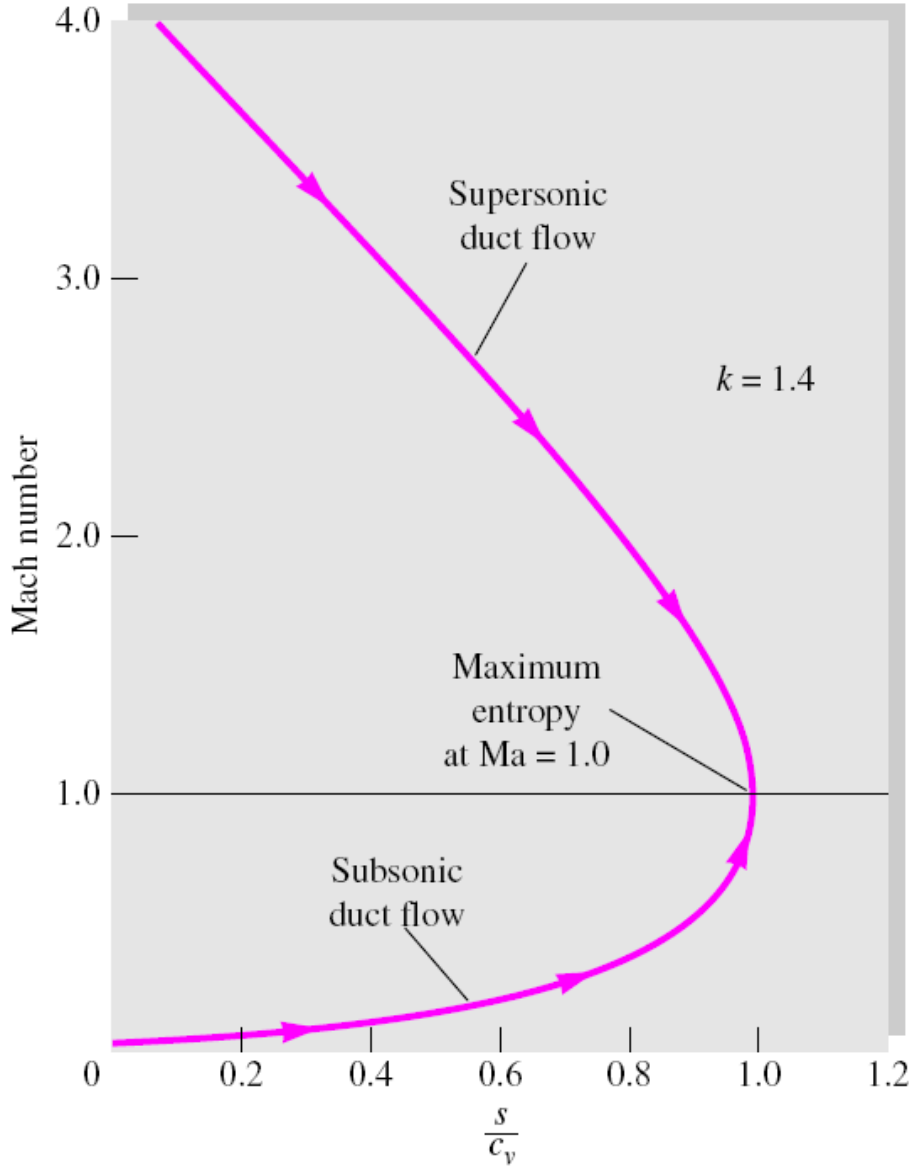
ΔL required to develop from Ma_1 to Ma_2 is given by

$$\bar{f}\frac{\Delta L}{D} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_1 - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_2$$

Property	Subsonic	Supersonic
p	Decreases	Increases
ρ	Decreases	Increases
V	Increases	Decreases
p_0, ρ_0	Decreases	Decreases
T	Decreases	Increases
Ma	Increases	Decreases
Entropy	Increases	Increases

جریان تراکم پذیر

تاثیر اصطکاک بر جریان در کانال با اصطکاک و بدون انتقال حرارت :



جریان تراکم پذیر

مثال:

Air flows subsonically in an adiabatic 2-cm-diameter duct. The average friction factor is 0.024. What length of duct is necessary to accelerate the flow from $\mathrm{Ma}_1 = 0.1$ to $\mathrm{Ma}_2 = 0.5$? What additional length will accelerate it to $\mathrm{Ma}_3 = 1.0$? Assume $k = 1.4$.

Equation (9.67) applies, with values of $\bar{f}L^*/D$ computed from Eq. (9.66) or read from Table B.3:

$$\bar{f}\frac{\Delta L}{D} = \frac{0.024\,\Delta L}{0.02\text{ m}} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{\mathrm{Ma}=0.1} - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{\mathrm{Ma}=0.5}$$

$$= 66.9216 - 1.0691 = 65.8525$$

Thus
$$\Delta L = \frac{65.8525(0.02\text{ m})}{0.024} = 55\text{ m} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

The additional length $\Delta L'$ to go from Ma = 0.5 to Ma = 1.0 is taken directly from Table B.2:

$$f\frac{\Delta L'}{D} = \left(\frac{fL^*}{D}\right)_{\mathrm{Ma}=0.5} = 1.0691$$

or
$$\Delta L' = L^*_{\mathrm{Ma}=0.5} = \frac{1.0691(0.02\text{ m})}{0.024} = 0.9\text{ m} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

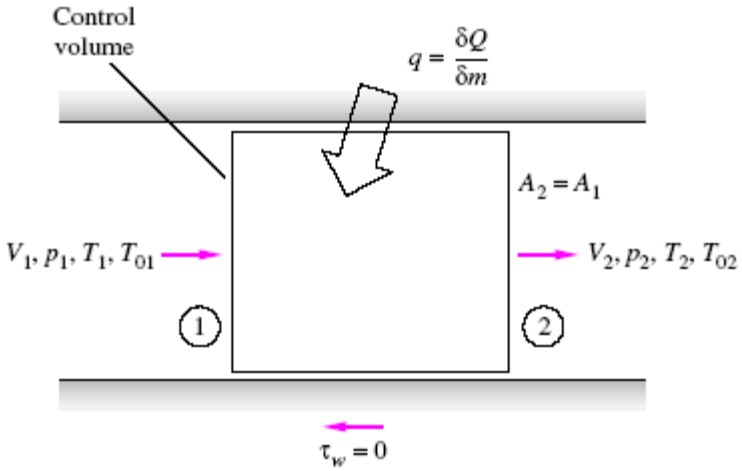
This is typical of these calculations: It takes 55 m to accelerate up to Ma = 0.5 and then only 0.9 m more to get all the way up to the sonic point.

جریان تراکم پذیر

جریان تراکم پذیر در کانال بدون اصطکاک و با انتقال حرارت:

فرضیات:

- جریان یک بعدی و پایا
- گاز کامل با خواص فیزیکی ثابت
- جریان در کانال با سطح مقطع ثابت
- صرف نظر از اصطکاک



جریان تراکم پذیر

معادلات حاکم:

Continuity: $$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{const}$$

x momentum: $$p_1 - p_2 = G(V_2 - V_1)$$

Energy: $$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 - h_1 - \tfrac{1}{2}V_1^2)$$

or $$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \frac{\delta Q}{\delta m} = h_{02} - h_{01}$$

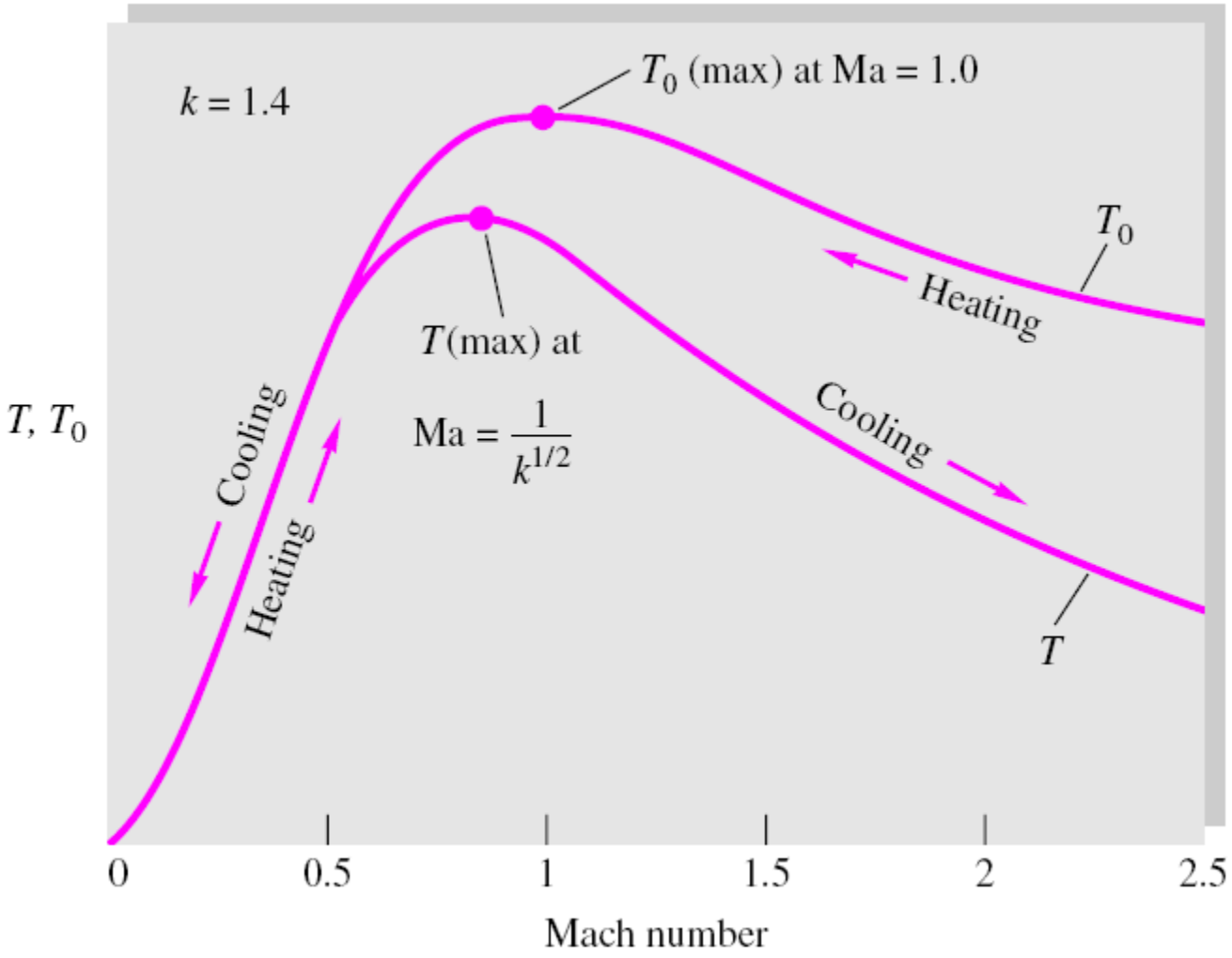
To complete the analysis, we use the perfect-gas and Mach number

$$\frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} \qquad h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{Ma}_2\, a_2}{\text{Ma}_1\, a_1} = \frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

جریان تراکم پذیر

تاثیر انتقال حرارت در جریان تراکم پذیر در کانال بدون اصطکاک:



جریان تراکم پذیر

تاثیر انتقال حرارت در جریان تراکم پذیر در کانال بدون اصطکاک:

	Heating		Cooling	
	Subsonic	Supersonic	Subsonic	Supersonic
T_0	Increases	Increases	Decreases	Decreases
Ma	Increases	Decreases	Decreases	Increases
p	Decreases	Increases	Increases	Decreases
ρ	Decreases	Increases	Increases	Decreases
V	Increases	Decreases	Decreases	Increases
p_0	Decreases	Decreases	Increases	Increases
s	Increases	Increases	Decreases	Decreases
T	*	Increases	†	Decreases

*Increases up to Ma $= 1/k^{1/2}$ and decreases thereafter.
†Decreases up to Ma $= 1/k^{1/2}$ and increases thereafter.