جریان خارجی

- Flow Past Immersed Bodies

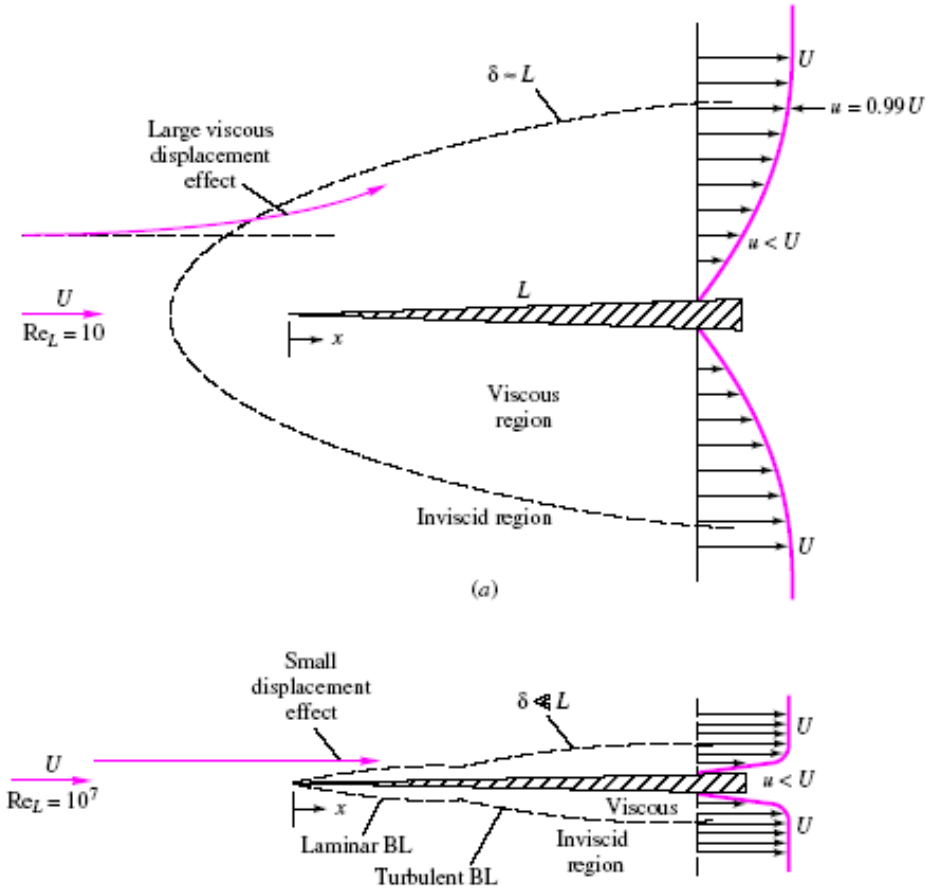
جریان خارجی

مباحث درس

- تعاریف و مفاهیم پایه
- معادله انتگرالی مومنتم
- معادلات جریان لایه مرزی
- لایه مرزی روی صفحه تخت
- لایه مرزی همراه ب گرادیان فشار
- ضریب لیف و درگ
- نتایج و روابط تجربی

جریان خارجی

- تئوری لایه مرزی در سال ۱۹۰۴، توسط پرانتل ارائه شد. به ناحیه‌ای که در آن سرعت سیال تحت تاثیر نیروهای برشی دیواره قرار گرفته، «لایه‌مرزی» گفته می‌شود.
- ضخامت لایه مرزی: به فاصله‌ای از سطح جامد که سرعت سیال در آن نقطه ۹۹ درصد سرعت جریان آزاد باشد، ضخامت لایه‌مرزی δ گفته می‌شود.



جریان خارجی

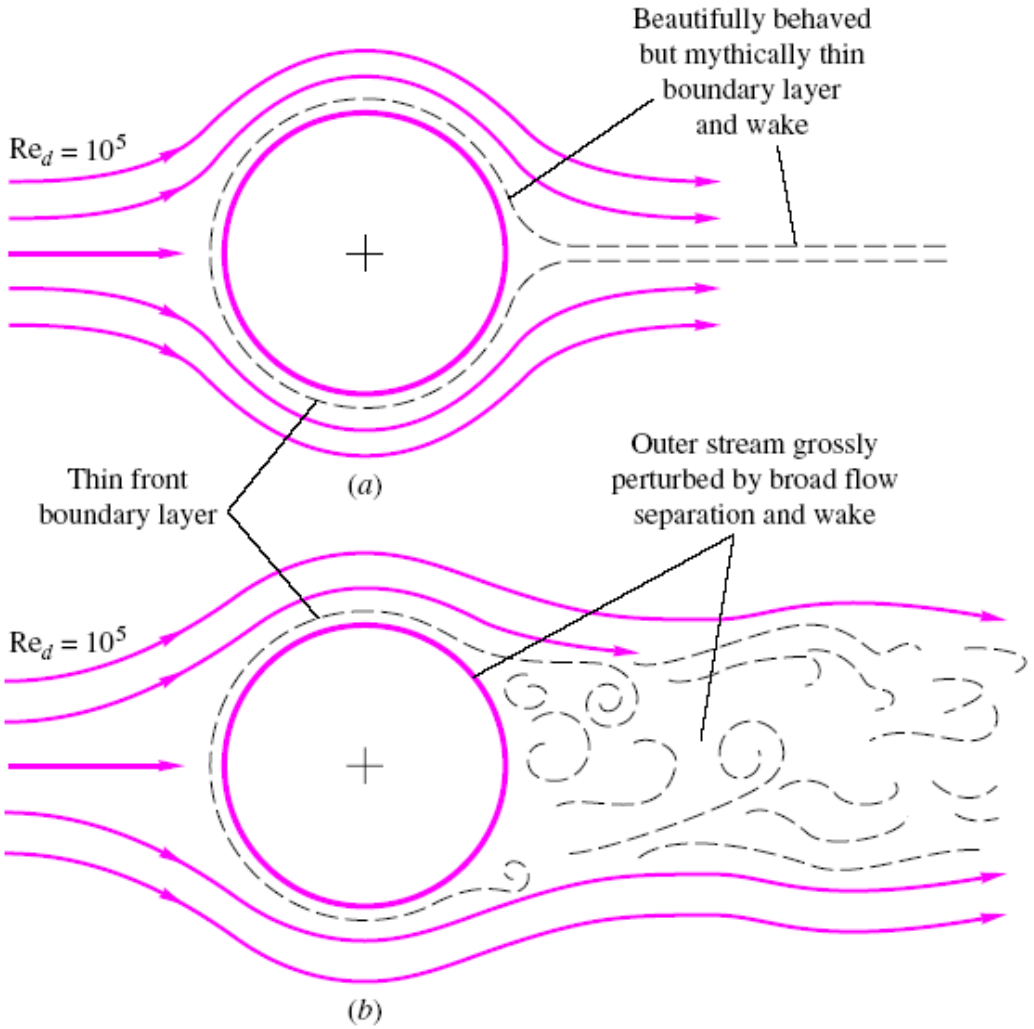
- ضخامت لایه مرزی در جریان آرام و آشفته:
- هنگامی که جریانی رو سطح به حرکت در می‌آید، در ابتدا لایه‌مرزی به صورت «لایه‌ای» یا آرام است.
- پس از آنکه که جریان بخشی از مرز جامد را طی می‌کند، ضخامت لایه‌مرزی رشد کرده و حرکت سیال ناپایدارتر می‌شود. در این حالت جریان به آشفته تبدیل می شود.

$$\frac{\delta}{x} \approx \begin{cases} \dfrac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} & \text{laminar} \quad 10^3 < \mathrm{Re}_x < 10^6 \\ \dfrac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulent} \quad 10^6 < \mathrm{Re}_x \end{cases}$$

Re_x	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$(\delta/x)_{\text{lam}}$	0.050	0.016	0.005		
$(\delta/x)_{\text{turb}}$			0.022	0.016	0.011

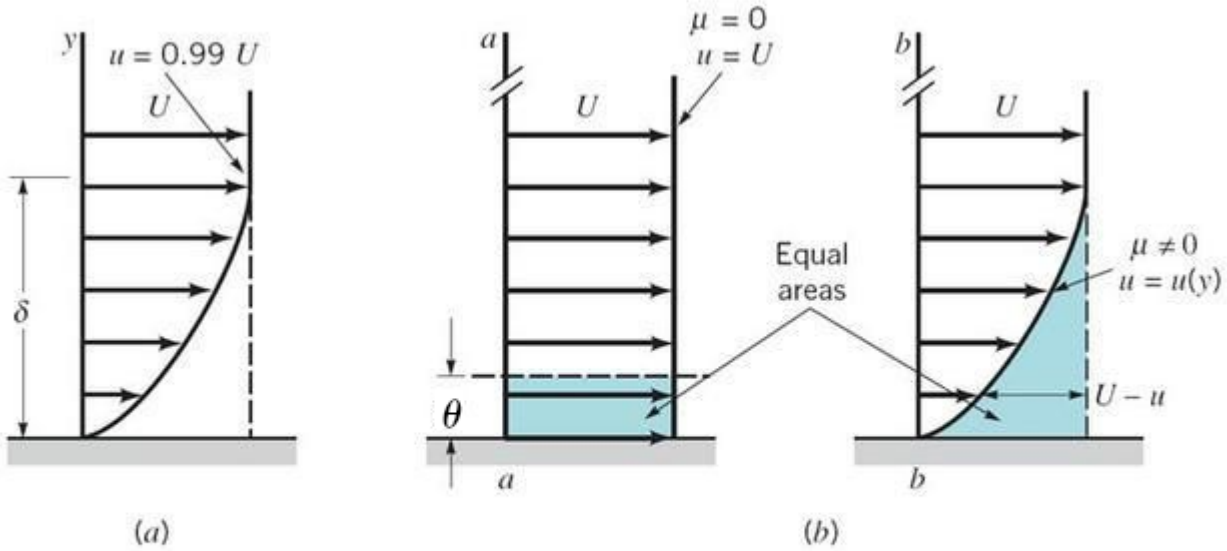
جریان خارجی

- لایه مرزی روی اجسام منحنی شکل



جریان خارجی

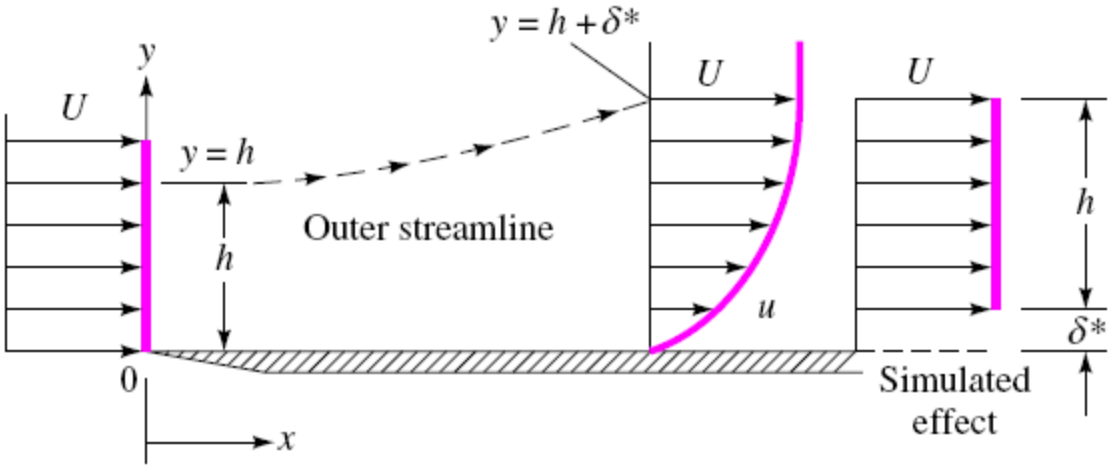
- ضخامت مومنتم



$$\rho b U^2 \Theta = \rho b \int_0^\infty u\,(U-u)\,dy \qquad \theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

جریان خارجی

- ضخامت جابجایی



$$\int_0^h \rho U b\, dy = \int_0^\delta \rho u b\, dy \qquad \delta = h + \delta^*$$

$$Uh = \int_0^\delta (U + u - U)\, dy = U(h + \delta^*) + \int_0^\delta (u - U)\, dy$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

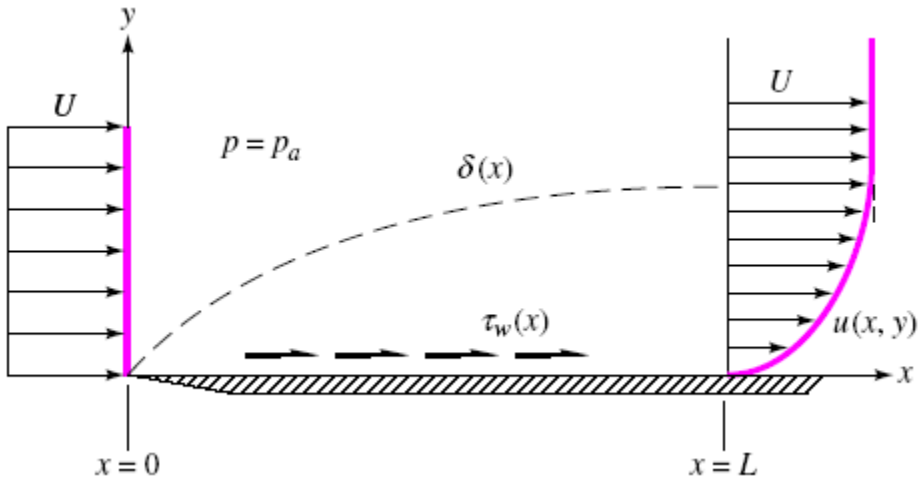
جریان خارجی

- تحلیل انتگرالی لایه مرزی

- نیروی درگ روی صفحه تخت:

$$D(x) = \rho b \int_0^{\delta(x)} u(U-u)\,dy$$

$$D(x) = \rho b U^2 \theta \qquad \theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$



جریان خارجی

- با ترکیب دو رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)\,dx \qquad \frac{dD}{dx} = b\tau_w$$

$$\frac{dD}{dx} = \rho b U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

- معادله انتگرالی مومنتوم روی صفحه تخت

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

جریان خارجی

- فرض پروفیل سرعت روی صفحه تخت:

$$u(x,y) \approx U\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \qquad 0 \le y \le \delta(x)$$

- محاسبه ضخامت مومنتوم:

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy \approx \frac{2}{15}\delta$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \approx \frac{2\mu U}{\delta}$$

- معادله دیفرانسیل نهایی:

$$\delta\, d\delta \approx 15\,\frac{\nu}{U}\,dx$$

- با فرض صفر بودن ضخامت لایه مرزی در ابتدای صفحه:

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{15\nu x}{U}$$

- به دست آمدن ضخمت لایه مرزی:

$$\frac{\delta}{x} \approx 5.5\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/2} = \frac{5.5}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

جریان خارجی

- محاسبه سایر پارامترها:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \approx \left(\frac{\frac{8}{15}}{\mathrm{Re}_x}\right)^{1/2} = \frac{0.73}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

$$c_f = 0.664/\mathrm{Re}_x^{1/2}$$

$$\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$$

$$\delta^* \approx \frac{1}{3}\delta \qquad \frac{\delta^*}{x} \approx \frac{1.83}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

جریان خارجی

مثال

Are low-speed, small-scale air and water boundary layers really thin? Consider flow at $U = 1$ ft/s past a flat plate 1 ft long. Compute the boundary layer thickness at the trailing edge for (*a*) air and (*b*) water at 68°F.

Solution

From Table A.2, $\nu_{air} \approx 1.61$ E-4 ft^2/s. The trailing-edge Reynolds number thus is

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{(1 \text{ ft/s})(1 \text{ ft})}{1.61 \text{ E-4 ft}^2/\text{s}} = 6200$$

Since this is less than 10^6, the flow is presumed laminar, and since it is greater than 2500, the boundary layer is reasonably thin. From Eq. (7.1*a*), the predicted laminar thickness is

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{6200}} = 0.0634$$

or, at $x = 1$ ft, $\delta = 0.0634$ ft ≈ 0.76 in *Ans.* (*a*)

From Table A.1 $\nu_{water} \approx 1.08$ E-5 ft^2/s. The trailing-edge Reynolds number is

$$\mathrm{Re}_L = \frac{(1 \text{ ft/s})(1 \text{ ft})}{1.08 \text{ E-5 ft}^2/\text{s}} \approx 92{,}600$$

This again satisfies the laminar and thinness conditions. The boundary layer thickness is

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\sqrt{92{,}600}} = 0.0164$$

or, at $x = 1$ ft, $\delta = 0.0164$ ft ≈ 0.20 in *Ans.* (*b*)

Thus, even at such low velocities and short lengths, both airflows and water flows satisfy the boundary layer approximations.

جریان خارجی

معادلات دیفرانسیلی لایه مرزی دوبعدی:

- معادلات کلی دیفرانسیلی در حالت دوبعدی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

- در ناحیه لایه مرزی:

$$v \ll u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu} \gg 1$$

جریان خارجی

- با اعمال فرضیات لایه مرزی بر معادله مومنتوم در جهت y:

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\rho\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

small small very small small

$$\frac{\partial p}{\partial y}\approx 0 \qquad \text{or} \qquad p\approx p(x) \quad \text{only}$$

- به عبارت دیگر در لایه مرزی فشار فقط تابع x است.
- تغییرات فشار در داخل لایه مرزی را می توان از حل جریان غیر لزج خارج لایه مرزی (معادله برنولی) به دست آورد.

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{dx}=-\rho U\frac{dU}{dx}$$

- با اعمال فرضیات لایه مرزی بر معادله مومنتوم در جهت x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ll\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

جریان خارجی

- بنابراین معادلات لایه مرزی دوبعدی به شکل زیر خواهد بود:

Continuity:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Momentum along wall:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \approx U\frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

where

$$\tau = \begin{cases} \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} & \text{laminar flow} \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} & \text{turbulent flow} \end{cases}$$

- با شرایط مرزی:

At $y = 0$ (wall): $u = v = 0$

As $y = \delta(x)$ (outer stream): $u = U(x)$

جریان خارجی

- لایه مرزی روی صفحه تخت:

$$\frac{u}{U} = f'(\eta) \qquad \eta = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2}$$

$$f''' + \tfrac{1}{2} f f'' = 0$$

At $y = 0$: $\quad f(0) = f'(0) = 0$

As $y \to \infty$: $\quad f'(\infty) \to 1.0$

The Blasius Velocity Profile

$y[U/(\nu x)]^{1/2}$	u/U	$y[U/(\nu x)]^{1/2}$	u/U
0.0	0.0	2.8	0.81152
0.2	0.06641	3.0	0.84605
0.4	0.13277	3.2	0.87609
0.6	0.19894	3.4	0.90177
0.8	0.26471	3.6	0.92333
1.0	0.32979	3.8	0.94112
1.2	0.39378	4.0	0.95552
1.4	0.45627	4.2	0.96696
1.6	0.51676	4.4	0.97587
1.8	0.57477	4.6	0.98269
2.0	0.62977	4.8	0.98779
2.2	0.68132	5.0	0.99155
2.4	0.72899	∞	1.00000
2.6	0.77246		

- روابط نهایی:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad \text{Blasius (1908)}$$

$$c_f = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

جریان خارجی

- محاسبه ضریب درگ:

$$c_f = \frac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}$$

$$\tau_w(x) = \frac{0.332\rho^{1/2}\mu^{1/2}U^{1.5}}{x^{1/2}}$$

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)\,dx = 0.664b\rho^{1/2}\mu^{1/2}U^{1.5}x^{1/2}$$

$$C_D = \frac{2D(L)}{\rho U^2 bL} = \frac{1.328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = 2c_f(L)$$

- مثال:

A sharp flat plate with $L = 50$ cm and $b = 3$ m is parallel to a stream of velocity 2.5 m/s. Find the drag on *one side* of the plate, and the boundary thickness δ at the trailing edge, for (*a*) air and (*b*) water at 20°C and 1 atm.

Solution

- *Assumptions:* Laminar flat-plate flow, but we should check the Reynolds numbers.
- *Approach:* Find the Reynolds number and use the appropriate boundary layer formulas.

جریان خارجی

ادامه حل

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu_{\text{air}}} = \frac{(2.5\ \text{m/s})(0.5\ \text{m})}{1.5\text{E-}5\ \text{m}^2/\text{s}} = 83{,}300 < 5\text{E}5 \text{ therefore assuredly laminar}$$

The appropriate thickness relation is Eq. (7.24):

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{5}{(83{,}300)^{1/2}} = 0.0173, \text{ or } \delta_{x=L} = 0.0173(0.5\ \text{m}) \cong 0.0087\ \text{m} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

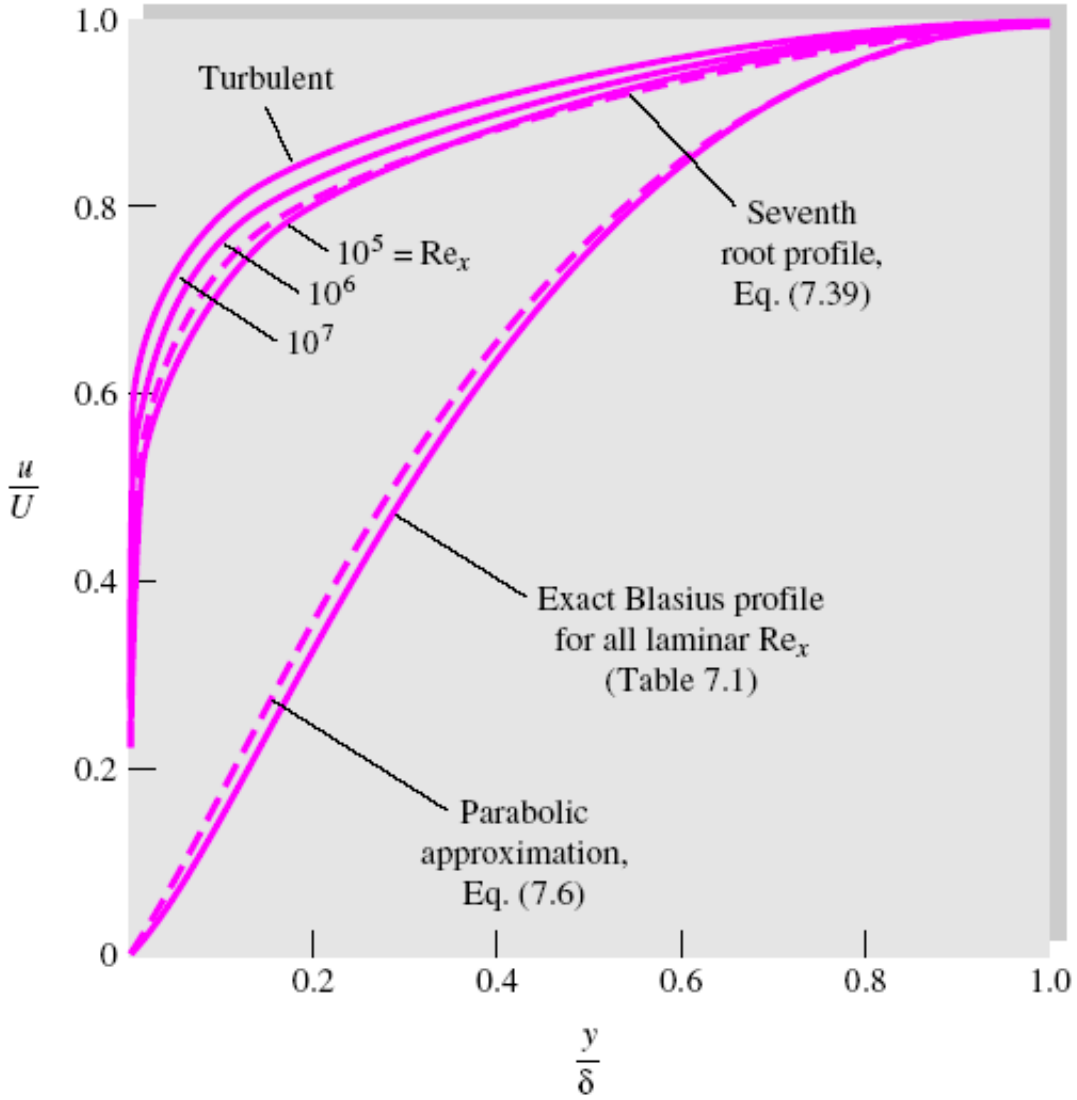
The laminar boundary layer is only 8.7 mm thick. The drag coefficient follows from Eq. (7.27):

$$C_D = \frac{1.328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{1.328}{(83{,}300)^{1/2}} = 0.0046$$

$$\text{or } D_{\text{one side}} = C_D \frac{\rho}{2} U^2 bL = (0.0046)\frac{1.2\ \text{kg/m}^3}{2}(2.5\ \text{m/s})^2(3\ \text{m})(0.5\ \text{m}) \approx 0.026\ \text{N} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

جریان خارجی

- لایه مرزی جریان آشفته روی صفحه تخت



جریان خارجی

- روابط جریان لایه مرزی آشفته روی صفحه تخت صاف

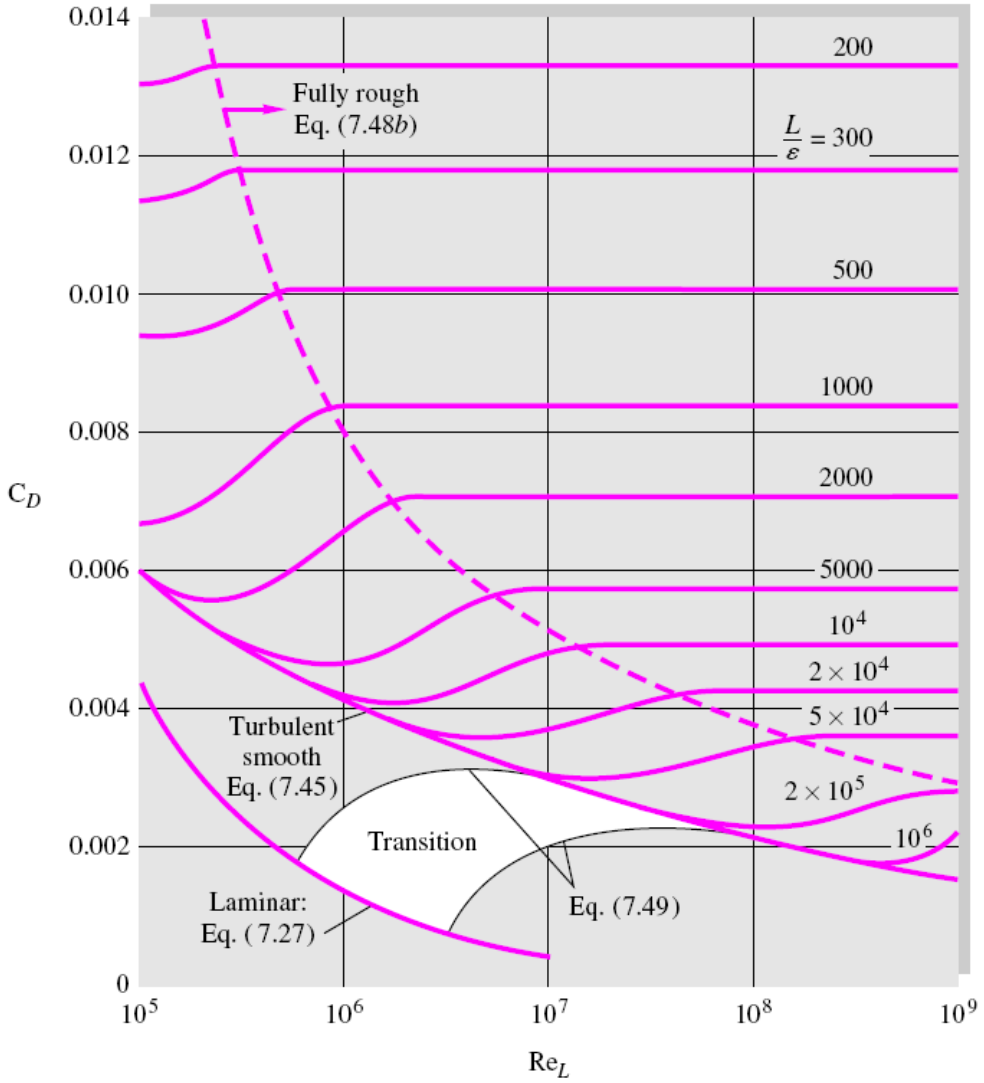
$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}$$

$$c_f \approx \frac{0.027}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}$$

$$C_D = \frac{0.031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} = \frac{7}{6} c_f(L)$$

جریان خارجی

- مقایسه ضریب درگ در جریان آرام، گذر و آشفته:



جریان خارجی

مثال

A hydrofoil 1.2 ft long and 6 ft wide is placed in a seawater flow of 40 ft/s, with $\rho = 1.99$ slugs/ft^3 and $\nu = 0.000011$ ft^2/s. (*a*) Estimate the boundary layer thickness at the end of the plate. Estimate the friction drag for (*b*) turbulent smooth-wall flow from the leading edge,

Solution

Part (a) The Reynolds number is

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{(40 \text{ ft/s})(1.2 \text{ ft})}{0.000011 \text{ ft}^2/\text{s}} = 4.36 \times 10^6$$

Thus the trailing-edge flow is certainly turbulent. The maximum boundary layer thickness would occur for turbulent flow starting at the leading edge. From Eq. (7.42),

$$\frac{\delta(L)}{L} = \frac{0.16}{(4.36 \times 10^6)^{1/7}} = 0.018$$

or $$\delta = 0.018(1.2 \text{ ft}) = 0.0216 \text{ ft} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

This is 7.5 times thicker than a fully laminar boundary layer at the same Reynolds number.

Part (b) For fully turbulent smooth-wall flow, the drag coefficient on one side of the plate is, from Eq. (7.45),

$$C_D = \frac{0.031}{(4.36 \times 10^6)^{1/7}} = 0.00349$$

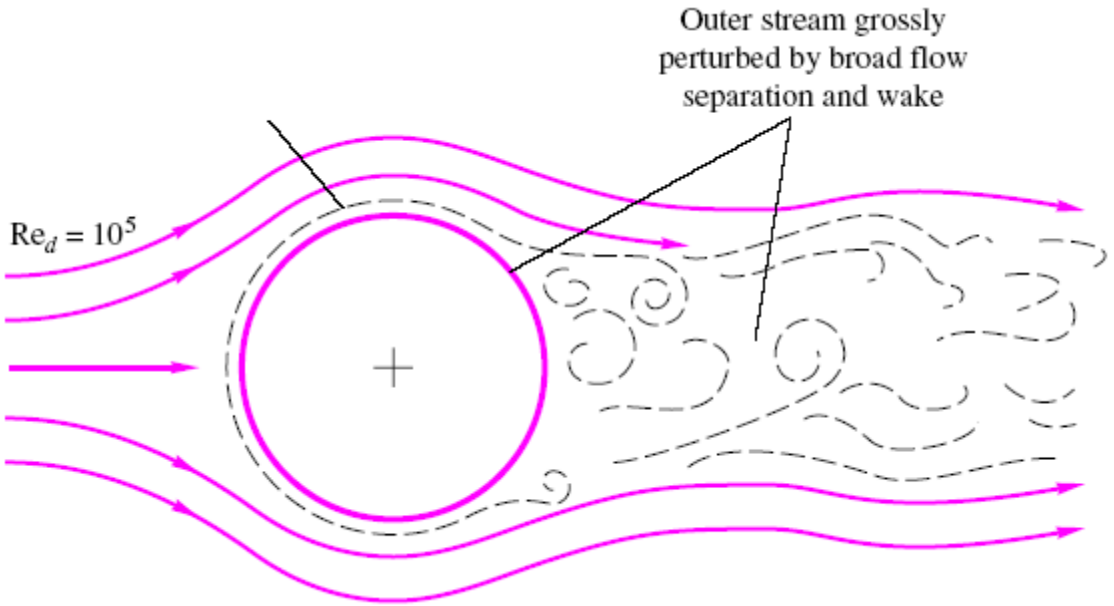
Then the drag on both sides of the foil is approximately

$$D = 2C_D(\tfrac{1}{2}\rho U^2)bL = 2(0.00349)(\tfrac{1}{2})(1.99)(40)^2(6.0)(1.2) = 80 \text{ lbf} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

جریان خارجی

لایه مرزی با گرادیان فشار

- جدایی جریان از سطح با وجود گرادیان فشار معکوس امکان پذیر است



- گرادیان فشار معکوس باعث ایجاد نقطه عطف در پروفیل سرعت لایه مرزی می شود.

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{\text{wall}} = \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\text{wall}} = -\rho U \frac{dU}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\text{wall}} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

جریان خارجی

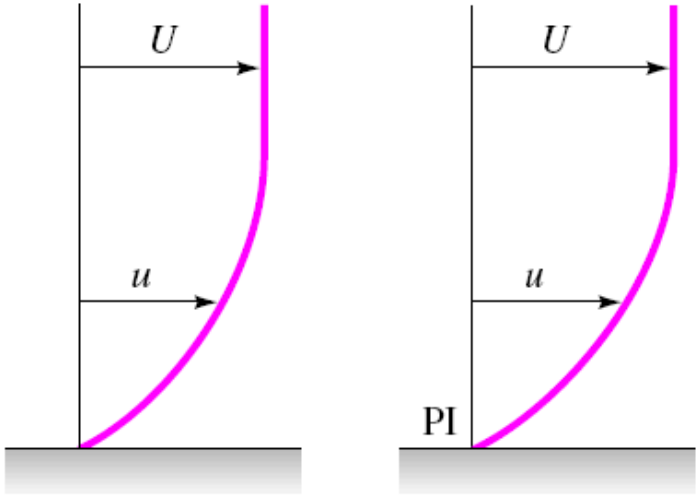
Semnan University

سه حالت برای گرادیان فشار در لایه مرزی می تواند وجود داشته باشد

الف) گرادیان فشار مطلوب $dP/dx<0$

ب) گرادیان فشار صفر $dP/dx=0$

ج) گرادیان فشار معکوس $dP/dx>0$



(a) Favorable gradient: $\frac{dU}{dx} > 0$, $\frac{dp}{dx} < 0$. No separation, PI inside wall

(b) Zero gradient: $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{dp}{dx} = 0$. No separation, PI at wall

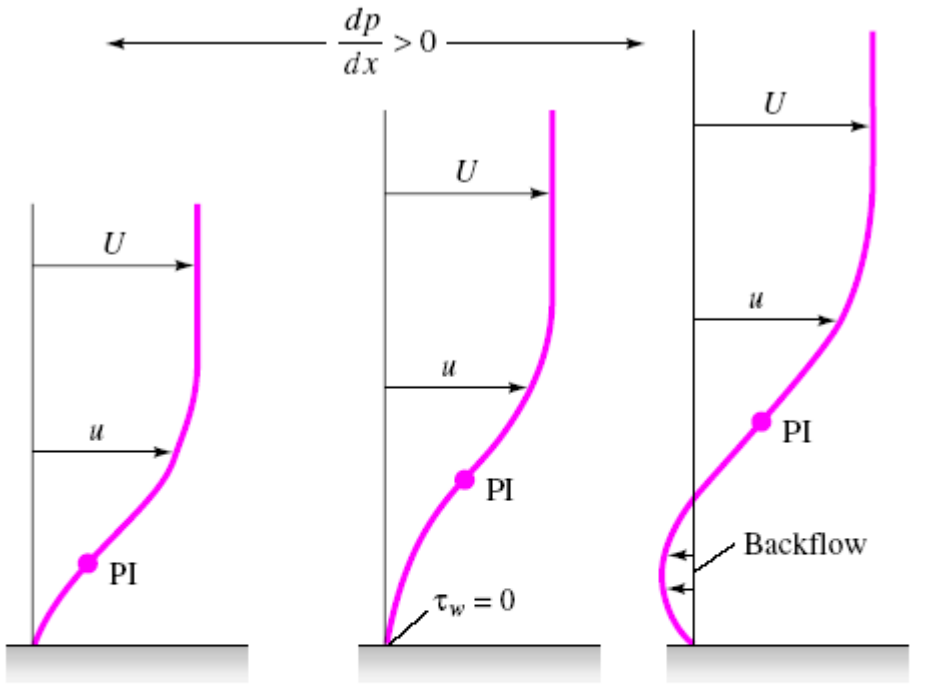
- در جریان روی صفحه تخت (حالت الف) و حالت ب

پروفیل سرعت لایه مرزی تقعر منفی دارد

$$u(x,y) \approx U\left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \qquad 0 \le y \le \delta(x)$$

جریان خارجی

- در پروفیل سرعت لایه مرزی با گرادیان فشار معکوس dP/dx>0 نقطه عطف ایجاد می شود.



(c) Weak adverse gradient:

$\frac{dU}{dx} < 0 \qquad \frac{dp}{dx} > 0$

No separation, PI in the flow

(d) Critical adverse gradient:

Zero slope at the wall:

Separation

(e) Excessive adverse gradient:

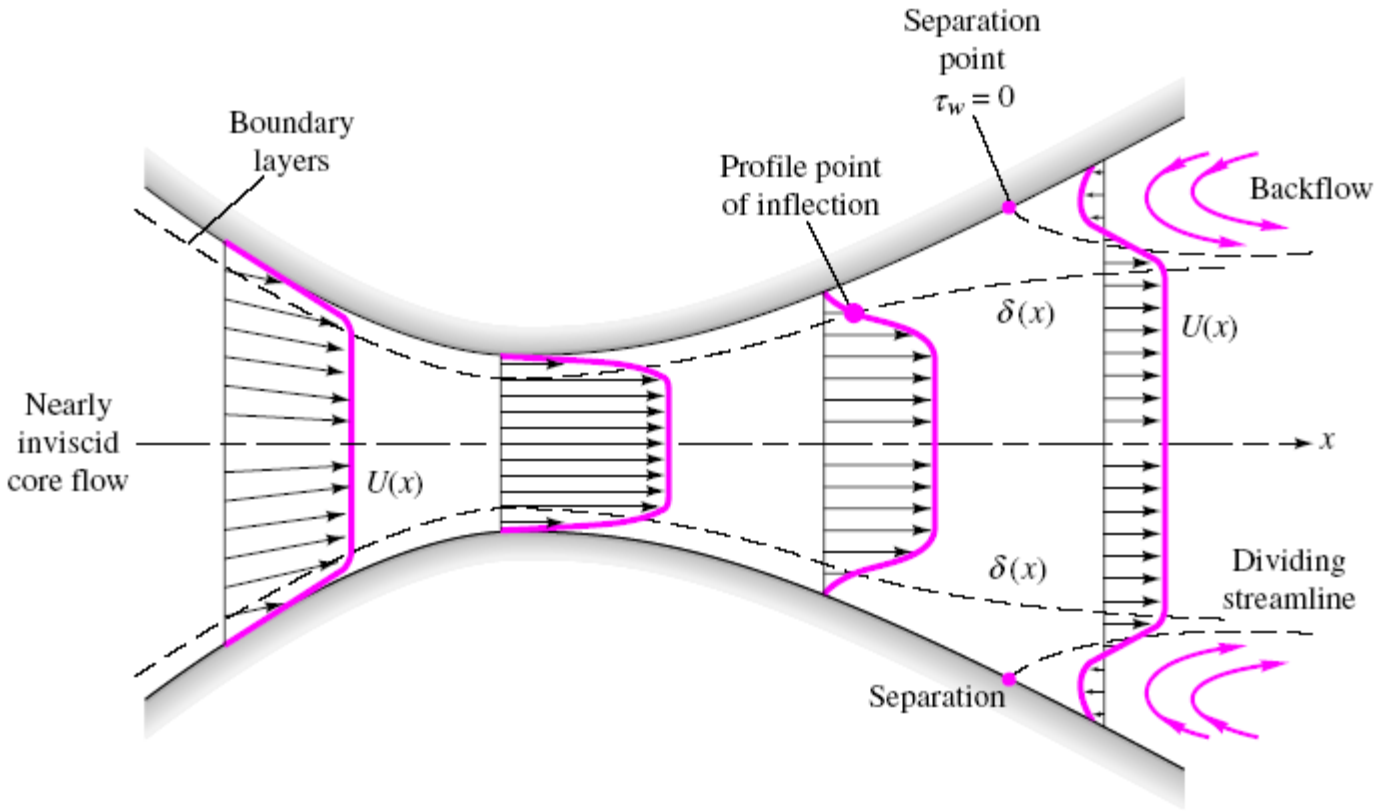
Backflow at the wall:

Separated flow region

جریان خارجی

Semnan University

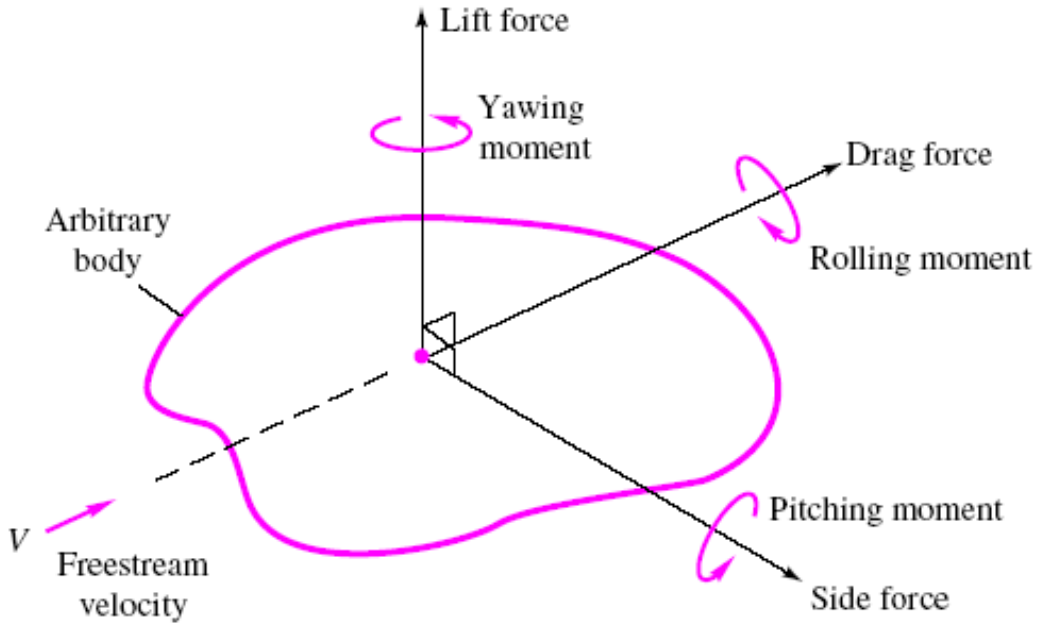
- گرادیان فشار معکوس dP/dx>0 در جریان خارجی نیز می تواند باعث جدایی جریان شود.



Nozzle: Decreasing pressure and area	*Throat*: Constant pressure and area	*Diffuser*: Increasing pressure and area
		Decreasing velocity
Increasing velocity	Velocity constant	
Favorable gradient	Zero gradient	Adverse gradient (boundary layer thickens)

جریان خارجی

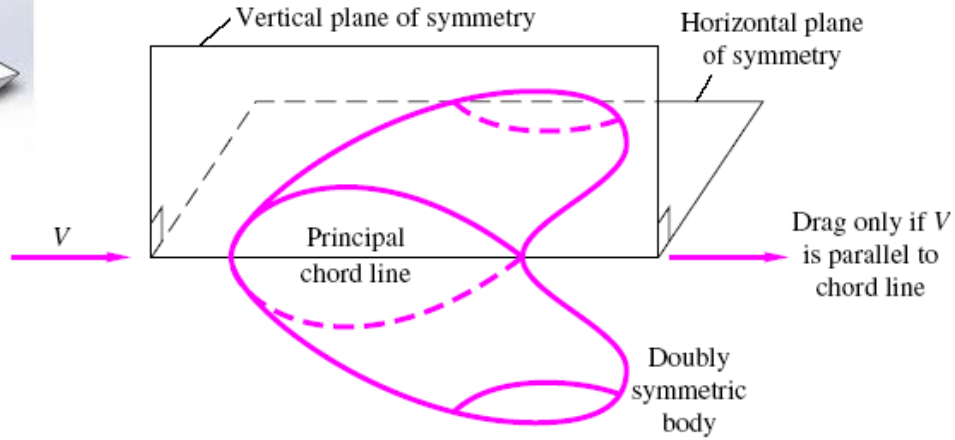
اثرات آیرودنامیکی جریان روی جسم



- جریان روی جسم نامتقارن می تواند سه نیرو (نیروی لیفت (برا)، نیروی درگ (پسا) و نیروی جانبی) در سه جهت مختلف و
- همچنین جریان روی جسم می تواند ممان در سه جهت ایجاد کند

جریان خارجی

- در اجسام کاملا متقارن (داری دو سطح تقارن) می تواند فقط نیروی درگ ایجاد شود.



- در اجسام متقارن در حالتی جریان با سرعت کم ضریب درگ تابع عدد رینولدز خواهد بود.

$$C_D = f(\mathrm{Re})$$

- ضریب درگ:

$$C_D = \frac{\text{drag}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

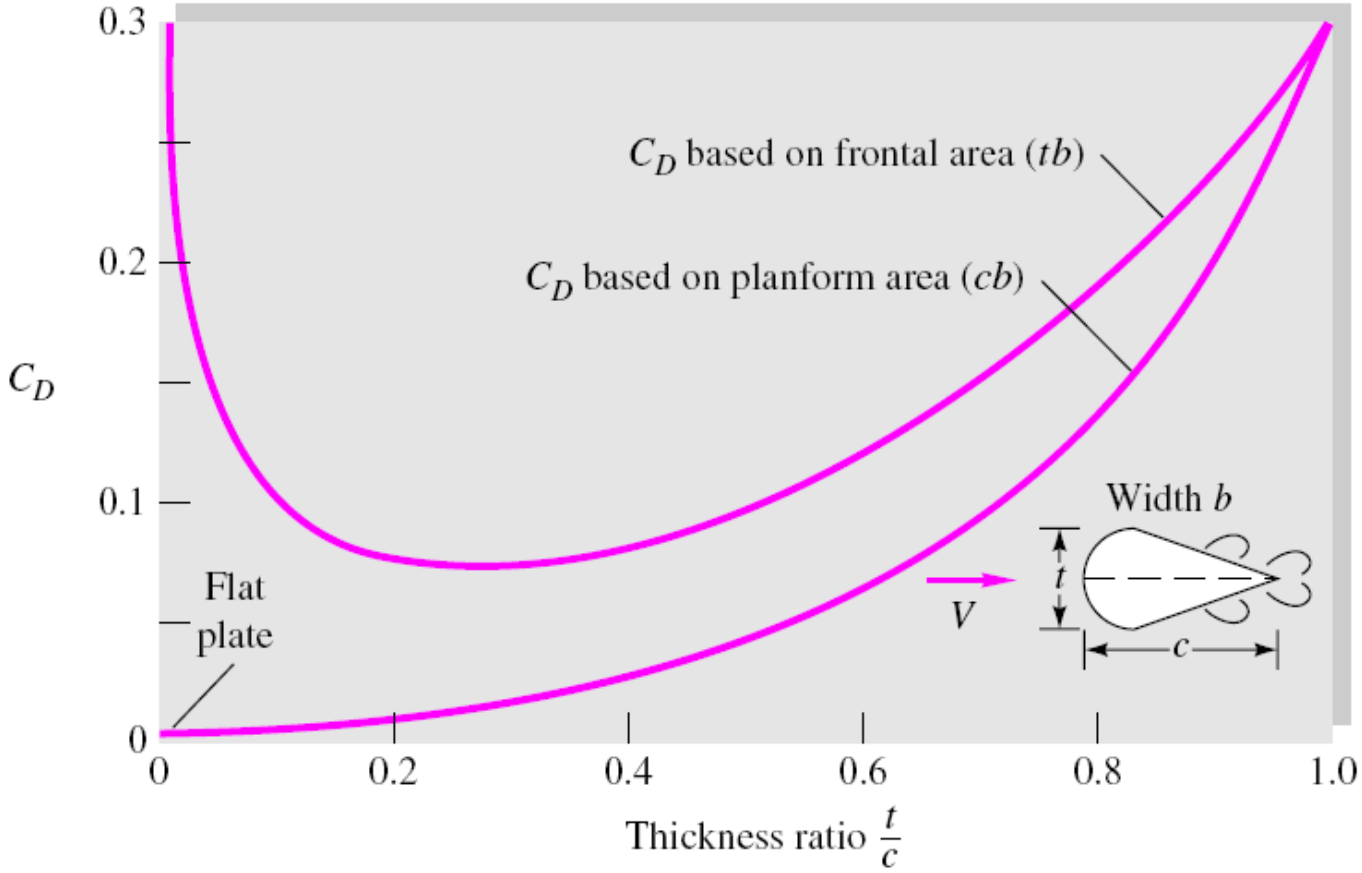
- سطح A معمولا به سه روش محاسبه می شود

جریان خارجی

Semnan University

- مبنای محاسبه سطح در رابطه ضریب درگ

1. *Frontal area,* the body as seen from the stream; suitable for thick, stubby bodies, such as spheres, cylinders, cars, trucks, missiles, projectiles, and torpedoes.
2. *Planform area,* the body area as seen from above; suitable for wide, flat bodies such as wings and hydrofoils.
3. *Wetted area,* customary for surface ships and barges.



جریان خارجی

درگ فشاری و درگ اصطکاکی

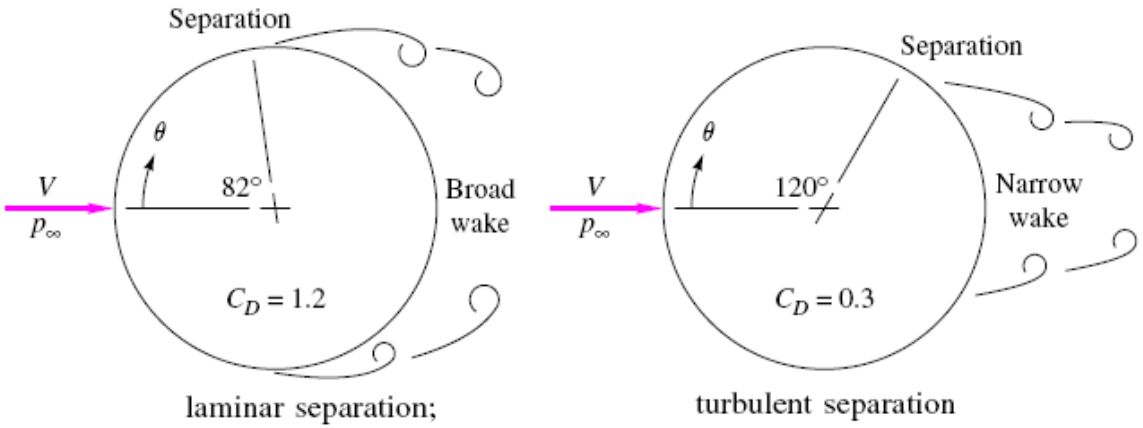
- درگ اصطکاکی به واسطه تنش برشی روی جسم ایجاد می شود.
- در فشاری به علت گرادیان فشار روی جسم به وجود می آید.

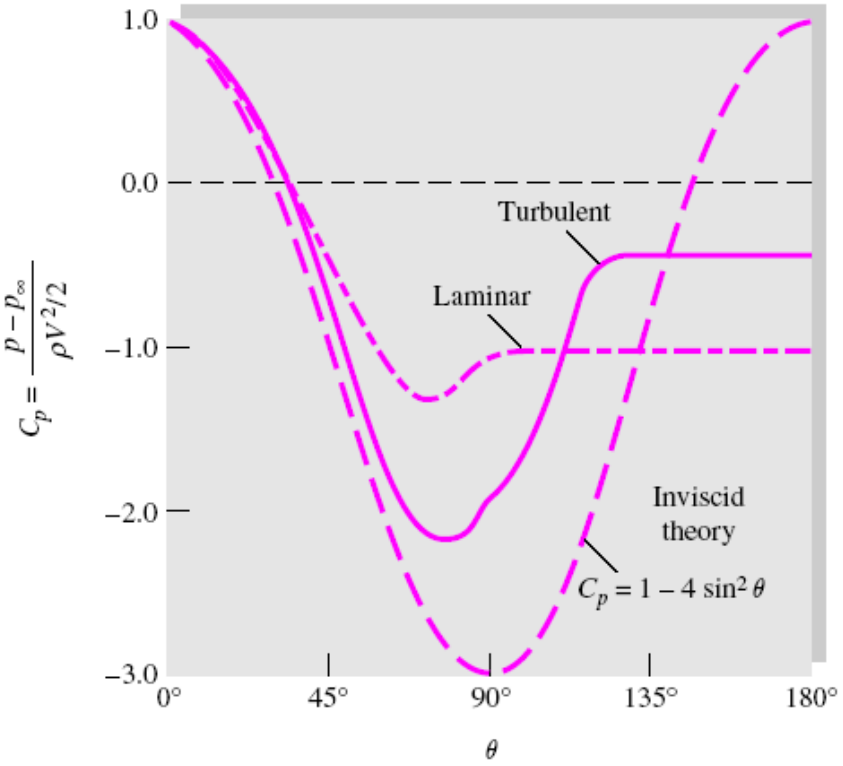
$$C_D = C_{D,\text{press}} + C_{D,\text{fric}}$$

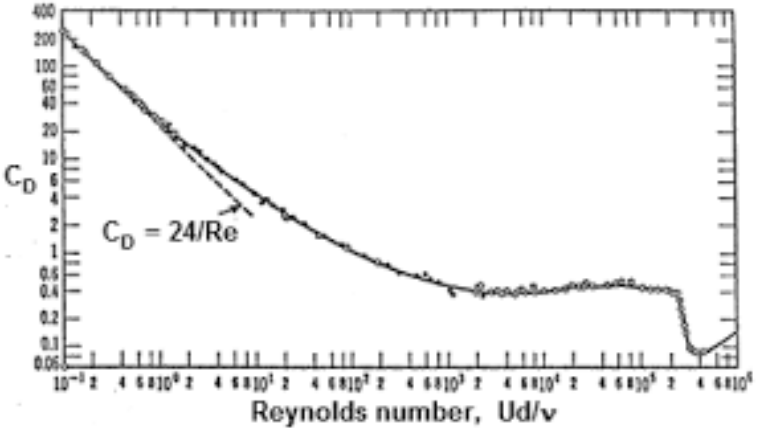
- در جریان روی صفحه تخت درگ فشاری صفر است.
- سهم درگ فشاری و اصطکاکی در جریان روی اجسام ضخیم می تواند بسیار متفاوت باشد.

جریان خارجی

توزیع فشار جریان روی استوانه:



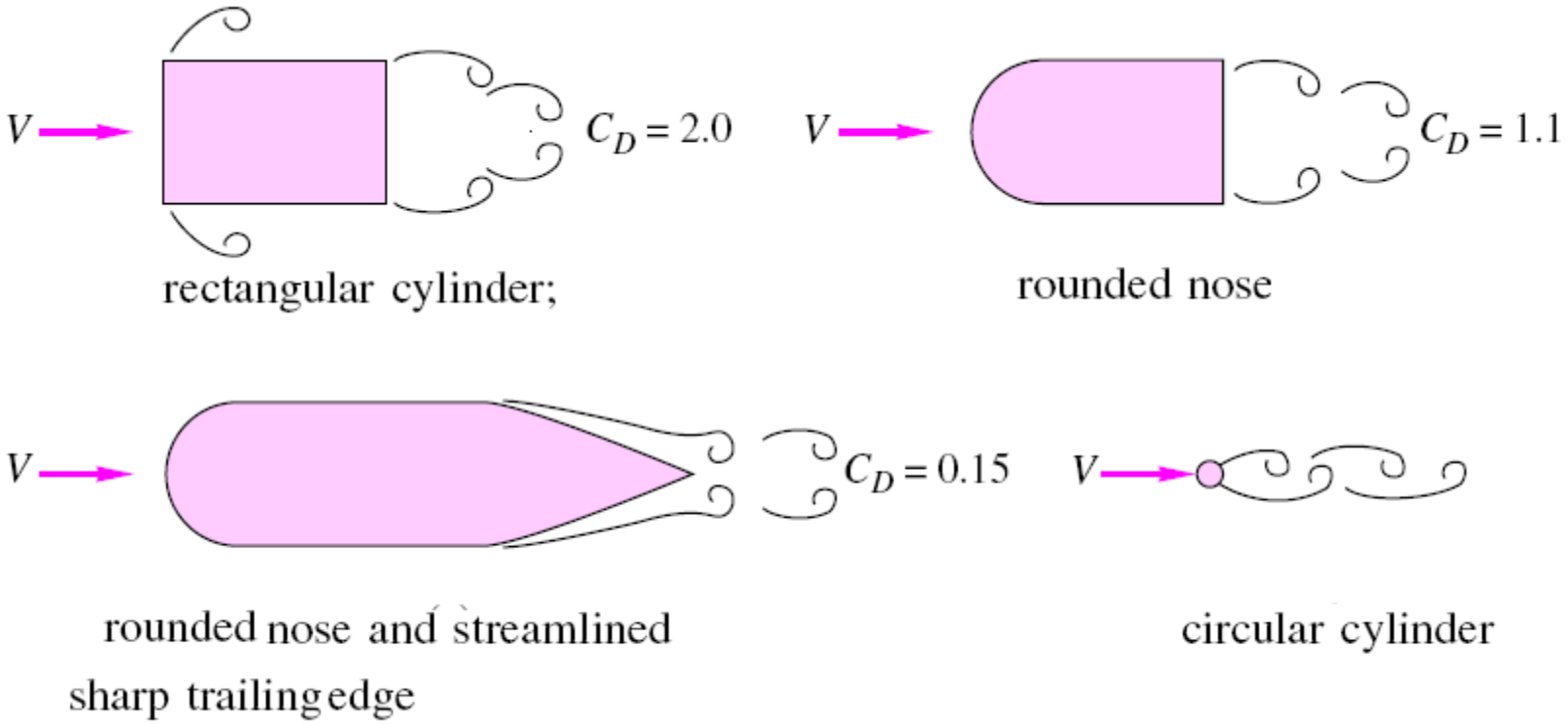




$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

جریان خارجی

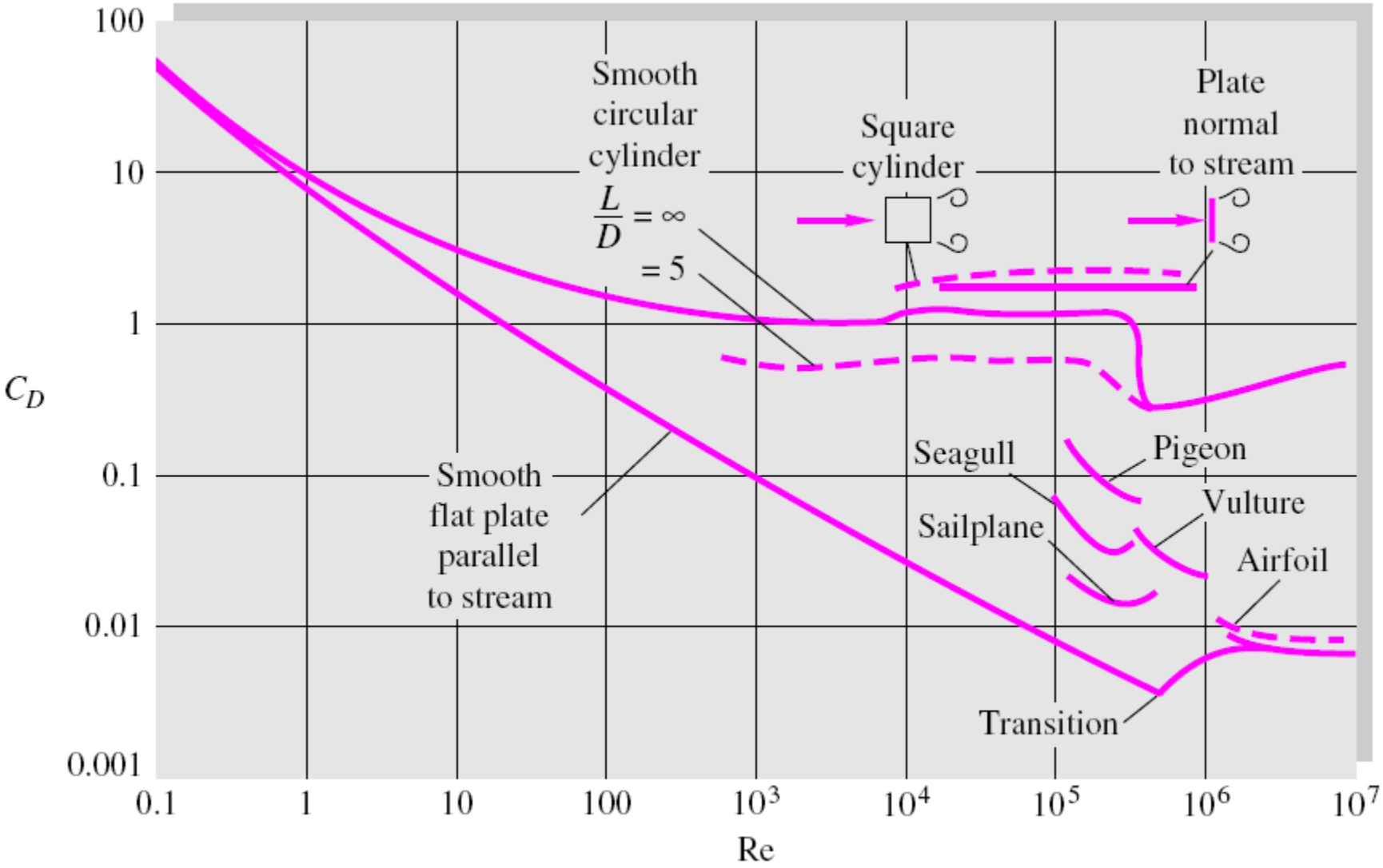
- تاثیر شکل جسم بر ضریب درگ



جریان خارجی

Semnan University

- ضریب درگ جریان روی اجسام دوبعدی



جریان خارجی

- ضریب درگ جریان روی اجسام سه بعدی